第 1 講　いろいろな曲線
PART1 放物線

要点整理と公式

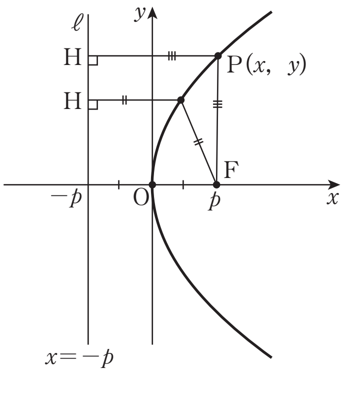
要点 ① 放物線の方程式

「放物線の定義」…定点Fと，Fを通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡。

点Fを「　　　」，直線 ℓ を「　　　」という。

焦点Fを $(p,\ 0)$　直線 ℓ を $x=-p$　$(p\neq 0)$

とする放物線の方程式について



点Pから ℓ に下ろした垂線をPHとすると

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x-(-p)|$$

$$(x-p)^2+y^2=(x+p)^2$$

よって $y^2=4px$（標準形）

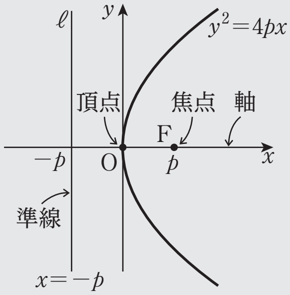
放物線の方程式

$y^2=4px$　$(p\neq 0)$

・焦点は $(p,\ 0)$　準線は $x=-p$

・頂点は $(0,\ 0)$　軸は x 軸

・放物線は軸に関して対称

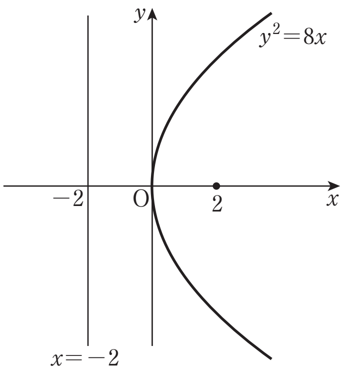


(ex) 放物線 $y^2=8x$

$y^2=\quad\cdot\ x$

焦点は（　, 0）

準線は $x=$

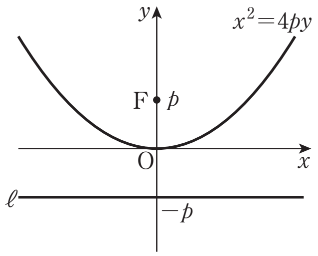


要点 ② y 軸を軸とする放物線

$y^2=4px$ において，x と y を入れ替えると

$$x^2=4py$$

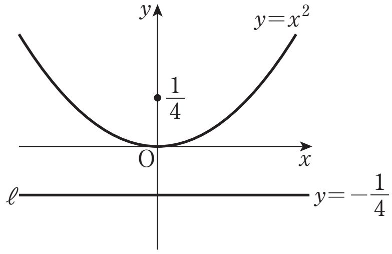
焦点は $(0,\ p)$　　準線は $y=-p$



(ex) 放物線 $y=x^2$

$$\Longleftrightarrow\quad x^2=\quad\cdot\quad y$$

焦点は $\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$　　準線は $y=-\dfrac{1}{4}$



1　(1)　次の放物線の焦点と準線を求め，概形をかけ。

(i)　$y^2=8x$　　(ii)　$y^2=-6x$　　(iii)　$y=\dfrac{1}{2}x^2$

(2)　次の放物線の方程式を求めよ。

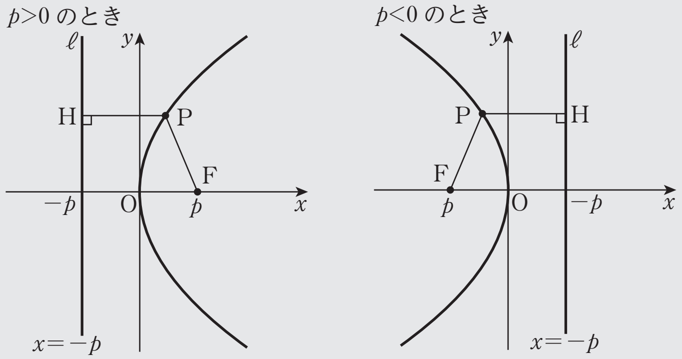
(i)　焦点が $(5,\ 0)$，準線が $x=-5$

(ii)　頂点が $(0,\ 0)$，準線が $y=1$

Point Pickup

放物線 $y^2=4px\ (p\neq 0)$

頂点は原点　　焦点は（　，0）　　準線は $x=$



ともに「　　　　　」

放物線 $x^2=4py\ (p\neq 0)$

頂点は原点　　焦点は $(0,\quad)$　　準線は $y=$

第 1 講　PART1 確認問題

次の放物線の焦点と準線を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y^2=12x$

焦点 ア

① $(0,\ 3)$　　② $(3,\ 0)$

③ $(-3,\ 0)$　　④ $(12,\ 0)$

準線 イ

① $x=3$　　② $x=-3$

③ $x=-12$　　④ $y=-3$

2 $y^2=-8x$

焦点 ウ

① $(0,\ -2)$　　② $(2,\ 0)$

③ $(-2,\ 0)$　　④ $(8,\ 0)$

準線 エ

① $x=2$　　② $x=-2$

③ $x=8$　　④ $y=2$

3 $y=\frac{1}{4}x^2$

焦点 オ

① $(0,\ 1)$　　② $(1,\ 0)$

③ $(0,\ 4)$　　④ $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$

準線 カ

① $x=-1$　　② $y=1$

③ $y=-1$　　④ $y=-4$

次の放物線の方程式を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

4 焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x=-2$ である。

キ

① $y^2=2x$　② $y^2=8x$

③ $y^2=-8x$　④ $x^2=8y$

5 頂点が $(0,\ 0)$，準線が $y=3$ である。

ク

① $x^2=-3y$　② $x^2=12y$

③ $x^2=-12y$　④ $y^2=-12x$

[MEMO]

PART2 楕円

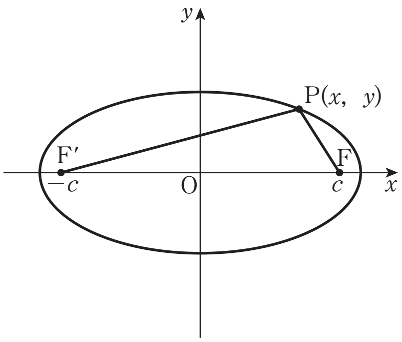
要点整理と公式

要点 ① 楕円の方程式

「楕円の定義」…2 定点 F，F′ からの距離の和が一定である点の軌跡。

2 点 F，F′ を「　　　」という。

2 点 F(c，0)，F′($-c$，0) を焦点とし，2 点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式について
（ただし，$a>c>0$ とする）



$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2(x+c)^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2 \qquad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$a>c>0$ であるから，$\sqrt{a^2-c^2}=b\ (>0)$ とおくと

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

よって $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（標準形）　　また $c=\sqrt{a^2-b^2}$

2 点 F，F′ を焦点とする楕円において，線分 FF′ の中点を楕円の「　　」という。
また

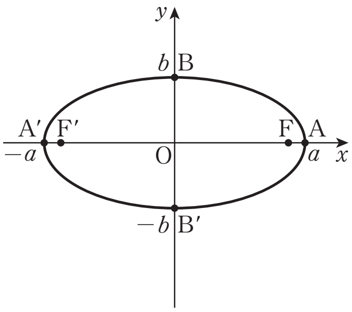
直線 FF′ と楕円の交点を A，A′

線分 FF′ の垂直二等分線と楕円の交点を B，B′

とすると

線分 AA′ を「　　　」　線分 BB′ を「　　　」

という。また，4 点 A，A′，B，B′ を「頂点」という。



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では，4 頂点は A$(a,\ 0)$，A′$(-a,\ 0)$，B$(0,\ b)$，B′$(0,\ -b)$である。

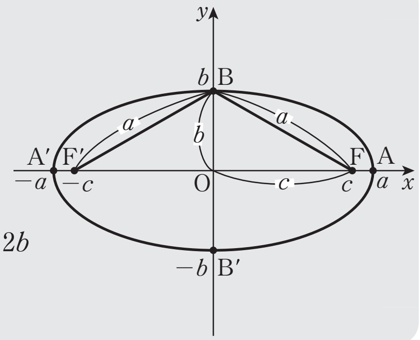
楕円の方程式

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a>b>0)$

・焦点は F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$　$(c=\sqrt{a^2-b^2})$

・中心は原点　　長軸の長さ $2a$　　短軸の長さ $2b$

・楕円は x 軸，y 軸，原点(中心)に関して対称



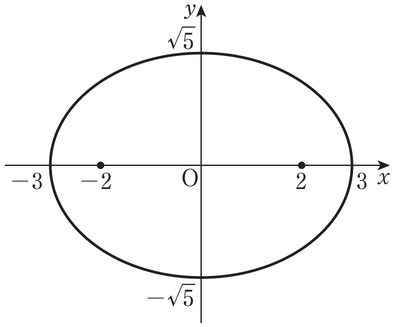
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt{4}=2$

焦点は(　，0)，(　　，0)

$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=1$ より　長軸の長さは 2・　＝

短軸の長さは 2・　　＝



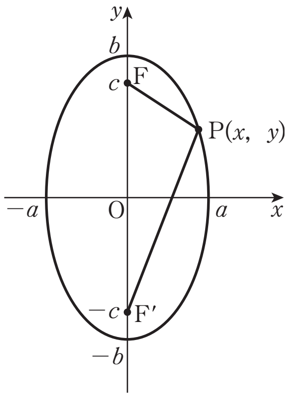
要点 ② 焦点が y 軸上にある楕円

$b>a>0$ のとき，2 点 F$(0,\ c)$，F′$(0,\ -c)$　$(c=\sqrt{b^2-a^2})$

を焦点とし，2 点からの距離の和が $2b$ である楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

である。



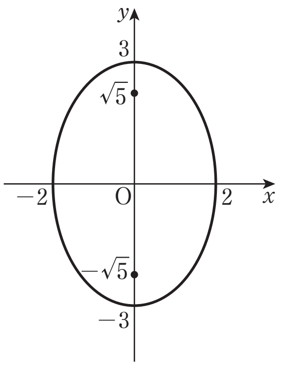
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

焦点は$(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ より 長軸の長さは $2\cdot3=6$

短軸の長さは $2\cdot2=4$



2 (1) 次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(ii) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$　(iii) $9x^2+25y^2=225$

(2) 次の楕円の方程式を求めよ。

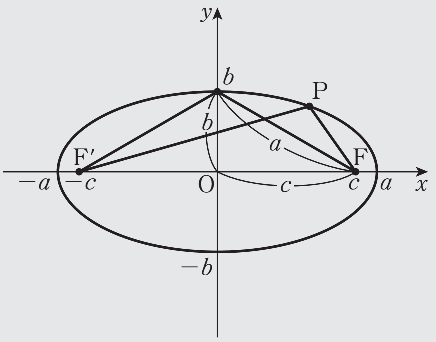
(i) 2 点 $(2,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ からの距離の和が 8

(ii) 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ からの距離の和が 12

Point Pickup

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ のグラフ

$a>b$ のとき



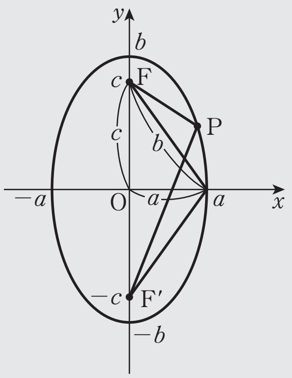
焦点は $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$

$c=$

長軸の長さは

短軸の長さは

$a<b$ のとき



焦点は $(0,\ c)$，$(0,\ -c)$

$c=$

長軸の長さは

短軸の長さは

第1講 PART2 確認問題

次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

焦点 ア

① $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$　② $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$

③ $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{7})$，$(0,\ -\sqrt{7})$

長軸，短軸の長さ イ

① 長軸 4，短軸 3　② 長軸 2，短軸 $\sqrt{3}$

③ 長軸 4，短軸 $2\sqrt{3}$　④ 長軸 8，短軸 6

2 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$

焦点 ウ

① $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$　② $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

③ $(\sqrt{7},\ 0)$，$(-\sqrt{7},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{7})$，$(0,\ -\sqrt{7})$

長軸，短軸の長さ エ

① 長軸 4，短軸 3　② 長軸 8，短軸 6

③ 長軸 16，短軸 9　④ 長軸 32，短軸 18

3 $4x^2+9y^2=36$

焦点 オ

① $(5,\ 0)$，$(-5,\ 0)$　② $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$

③ $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$　④ $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

長軸，短軸の長さ カ

① 長軸 3，短軸 2　② 長軸 6，短軸 4

③ 長軸 9，短軸 4　④ 長軸 18，短軸 8

次の楕円の方程式を求めよ。

4 2 点 (1, 0), (−1, 0) からの距離の和が 6 である。

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{キ}}}+\frac{y^2}{\boxed{\text{ク}}}=1$$

5 2 点 (0, 2), (0, −2) からの距離の和が $2\sqrt{7}$ である。

$$\frac{x^2}{\boxed{\text{ケ}}}+\frac{y^2}{\boxed{\text{コ}}}=1$$

[MEMO]

PART3 双曲線

要点整理と公式

要点 ① 双曲線の方程式

「双曲線の定義」…2 定点 F，F′ からの距離の差が一定である点の軌跡。

2 点 F，F′ を「　　　」という。

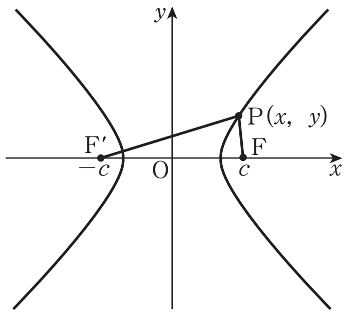
2 点 F$(c,\ 0)$，F′$(-c,\ 0)$ を焦点とし，2 点からの距離の差が $2a$ である双曲線の方程式について（ただし，$c>a>0$ とする）

すなわち

$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$

楕円の場合と同様に変形すると

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$



$c>a>0$ であるから，$\sqrt{c^2-a^2}=b\ (>0)$ とおくと　$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

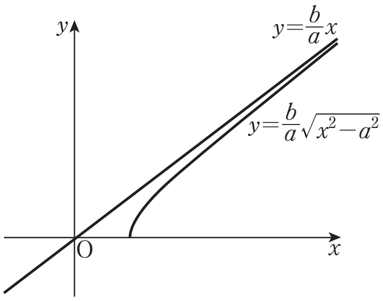
よって $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（標準形）　また $c=\sqrt{a^2+b^2}$

2 点 F，F′ を焦点とする双曲線において，線分 FF′ の中点を双曲線の「　　　」という。
また，直線 FF′ を「主軸」，主軸と双曲線の 2 つの交点を「　　　」という。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ では，頂点は $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$ である。

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ より，$x>0$，$y>0$（第 1 象限）のとき $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}<\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2}=\dfrac{b}{a}x$

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ のグラフは，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ に限りなく近づいていく，つまり直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ が「　　　」であることがわかる。同様に考えると，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の漸近線は，直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ と直線 $y=-\dfrac{b}{a}x$ であることがわかる。



双曲線の方程式

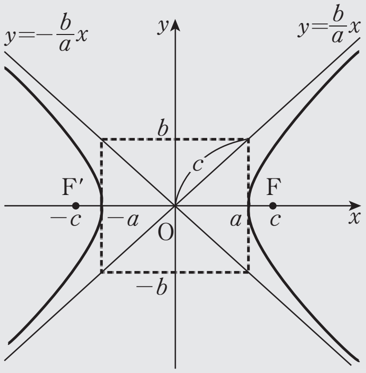
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

・焦点は $\mathrm{F}(c,\ 0)$，$\mathrm{F}'(-c,\ 0)$　$(c=\sqrt{a^2+b^2})$

・中心は原点　　頂点は $(a,\ 0)$，$(-a,\ 0)$

・漸近線は $y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$

・双曲線は x 軸，y 軸，原点(中心)に関して対称

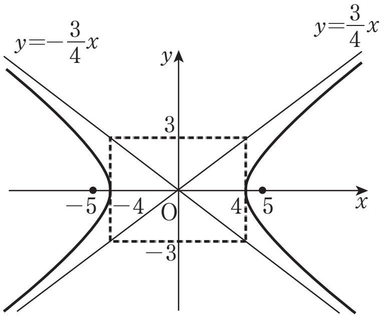


(ex) 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \iff \frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$ より

焦点は (　, 0)，(　　, 0)　頂点は (　, 0)，(　　, 0)

漸近線は　$y=$ 　x，$y=$ 　　x

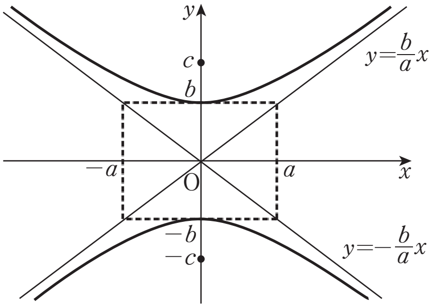


要点② 焦点が y 軸上にある双曲線

$a>0$，$b>0$ のとき，2 点 $\mathrm{F}(0,\ c)$，$\mathrm{F}'(0,\ -c)$ $(c=\sqrt{a^2+b^2})$ を焦点とし，2 点からの距離の差が $2b$ である双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

である。頂点は $(0,\ b)$，$(0,\ -b)$　　漸近線は $y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$

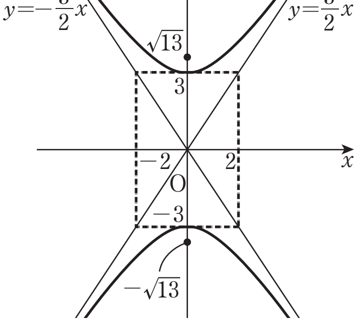


(ex) 双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1 \iff \frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=-1$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ より

焦点は (0, 　　)，(0, 　　　)　頂点は (0, 　)，(0, 　　)

漸近線は $y=$ 　x，$y=$ 　　x



3 (1) 次の双曲線の焦点，漸近線を求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (ii) $2x^2-3y^2=-6$

(2) 次の双曲線の方程式を求めよ。

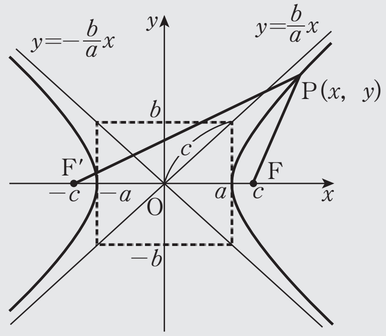
(i) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の差が $2\sqrt{5}$

(ii) 焦点が 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ で，漸近線が $y=\pm 2x$

Point Pickup

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$ のグラフ

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$



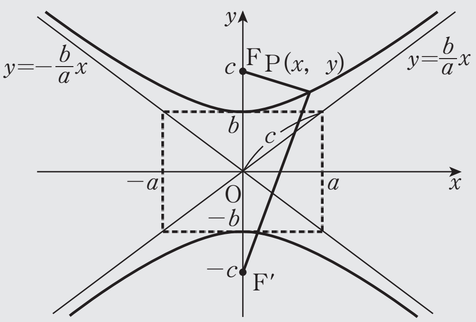
焦点は $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$

$c=$

漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

「　　　　　　」

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$



焦点は $(0,\ c)$，$(0,\ -c)$

$c=$

漸近線は $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$

「　　　　　　」

第 1 講　PART3 確認問題

次の双曲線の焦点，漸近線を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

焦点　ア

① $(\sqrt{3},\ 0)$，$(-\sqrt{3},\ 0)$　② $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

③ $(0,\ \sqrt{3})$，$(0,\ -\sqrt{3})$　④ $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

漸近線　イ

① $y=2x$，$y=-2x$　② $y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-\dfrac{1}{2}x$

③ $y=4x$，$y=-4x$　④ $y=\dfrac{1}{4}x$，$y=-\dfrac{1}{4}x$

2　$5x^2-4y^2=-20$

焦点　ウ

① $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$　② $(0,\ 3)$，$(0,\ -3)$

③ $(9,\ 0)$，$(-9,\ 0)$　④ $(0,\ 9)$，$(0,\ -9)$

漸近線　エ

① $y=\sqrt{5}\,x$，$y=-\sqrt{5}\,x$　② $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x$

③ $y=\dfrac{5}{4}x$，$y=-\dfrac{5}{4}x$　④ $y=\dfrac{4}{5}x$，$y=-\dfrac{4}{5}x$

次の双曲線の方程式を求めよ。答えは下の①～④のうちから選べ。

3 2点 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$ からの距離の差が 6 オ

① $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$　② $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$

③ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$　④ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$

4 焦点が2点 $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$ で，漸近線が $y=\pm\sqrt{2}\,x$

カ

① $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{4}=-1$　② $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=1$

③ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{6}=-1$　④ $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{3}=-1$

【MEMO】

PART4　２次曲線の平行移動

要点整理と公式

要点 ①　方程式 $f(x,\ y)=0$ の表す曲線

座標平面上で x，y の方程式 $f(x,\ y)=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体が曲線を表すとき，この曲線を方程式 $(x,\ y)=0$ の表す曲線，または曲線 $(x,\ y)=0$ という。

またこのとき，この方程式 $(x,\ y)=0$ を，この曲線の方程式という。

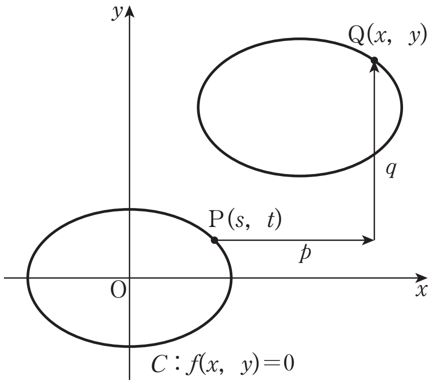
(ex) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \iff \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　これは「　　　」の方程式

要点 ②　曲線の平行移動

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される曲線 C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線 C' の方程式を求める。

この平行移動によって，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が C' 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移されるとすると

$$\begin{cases} x=s+p \\ y=t+q \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} s=x-p \\ t=y-q \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$



また，点 P は C 上の点より

$$f(s,\ t)=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$f(x-p,\ y-q)=0$　　　これが曲線 C' の方程式である。

> **曲線の平行移動**
>
> 曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は
>
> $$f(x-p,\ y-q)=0$$

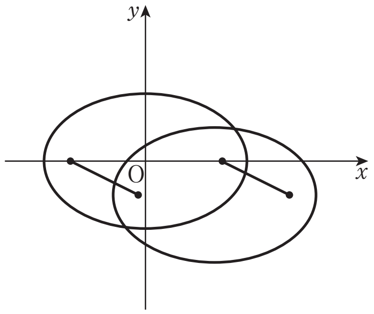
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ……①を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した楕円の方程式は

$$\frac{(x\qquad)^2}{9}+\frac{(y\qquad)^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

楕円①の焦点は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$であるから，

楕円②の焦点は $(\sqrt{5}\qquad,\qquad)$，

$(-\sqrt{5}\qquad,\qquad)$



要点③ 2次曲線の方程式

「2次曲線」 … x，y の2次式で表される曲線

一般的に，2次曲線は

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

の形で表されることが知られている。

特に

放物線 $y^2=4px$ $\quad x^2=4py$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

のように，方程式が「標準形」で表される2次曲線を平行移動した曲線の方程式は

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

の形で表される。

(ex) $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ ……①の分母を払って整理すると

$$4x^2+9y^2+8x-54y+49=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

逆に，②を①の形に変形することで，②が表す図形が

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

を x 軸方向に　　，y 軸方向に　平行移動した楕円を表すことがわかる。

4 (1)　次の 2 次曲線を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(i)　$y^2=2x$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(iii)　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)　次の方程式はどのような図形を表すか。

(i)　$y^2+x-4y+6=0$

(ii)　$9x^2-4y^2-18x-24y+9=0$

Point Pickup

曲線の平行移動

曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$f(x\qquad,\ y\qquad)=0$

つまり，移動前の式において，x を x　　に，y を y　　におき換えたもの。

2 次曲線の平行移動

2 次方程式 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ について

$(y-q)^2=4P(x-p)$ の形に変形できるとき，「　　　　」$y^2=4Px$ を

$\dfrac{(x-p)^2}{A^2}+\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$ の形に変形できるとき，「　　　　」$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を

$\dfrac{(x-p)^2}{A^2}-\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$ の形に変形できるとき，「　　　　」$\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を

それぞれ x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形を表す。

第 1 講 PART4 確認問題

次の 2 次曲線を[　　]内のように平行移動したあとに得られる曲線の方程式を求めよ。また，その曲線の焦点を求めよ。

ただし，答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y^2=4x$　[x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動]

方程式 ア

① $y^2-1=4x-2$　② $y^2-1=4(x-2)$

③ $(y-1)^2=4(x-2)$　④ $(y+1)^2=4(x+2)$

焦点 イ

① (1，3)　② (3，1)

③ (6，1)　④ (−1，−1)

2 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$　[x 軸方向に 1, y 軸方向に −2 だけ平行移動]

方程式 ウ

① $\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{y^2+2}{6}=1$

② $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$

③ $\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$

④ $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=-1$

焦点 エ

① (1，0)，(1，−4)　② (1，2)，(1，−6)

③ (−1，0)，(−1，4)　④ (−1，−2)，(3，−2)

3 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　[x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動]

方程式 オ

① $\frac{x^2-2}{5}-\frac{y^2-3}{4}=1$

② $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$

③ $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$

④ $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=-1$

焦点 カ

① $(1,\ 3)$, $(3,\ 3)$　② $(5,\ 3)$, $(-1,\ 3)$

③ $(1,\ -3)$, $(-5,\ -3)$　④ $(3,\ -1)$, $(3,\ 5)$

次の問いについて，キ，ケ は下の①～④のうちから，

ク，コ は⑤～⑧のうちから選べ。

4 曲線 $y^2-2x-2y+7=0$ は，放物線 キ を ク だけ

平行移動したものである。

① $y^2=x$　② $y^2=2x$

③ $y^2=-2x$　④ $x^2=2y$

⑤ x 軸方向に 1，y 軸方向に 2

⑥ x 軸方向に 1，y 軸方向に 3

⑦ x 軸方向に 3，y 軸方向に 1

⑧ x 軸方向に -3，y 軸方向に -1

5 曲線 $2x^2-3y^2-8x-6y-1=0$ は，双曲線 [ケ] を [コ] だけ平行移動したものである。

① $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　② $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$

③ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　④ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=-1$

⑤ x 軸方向に 1，y 軸方向に 2

⑥ x 軸方向に -1，y 軸方向に 2

⑦ x 軸方向に 2，y 軸方向に -1

⑧ x 軸方向に -2，y 軸方向に 1

第 2 講　2 次曲線と直線

PART1　2 次曲線と直線の共有点

要点整理と公式

要点 ①　2 次曲線と直線の共有点

2 次曲線 $f(x,\ y)=0$　……①と直線 $ax+by+c=0$　……②の共有点の座標は，

①と②を連立させた連立方程式の実数解によって与えられる。

(ex) 放物線 $y^2=4x$ と直線 $y=-2x+4$ の共有点の座標

$$\begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots① \\ y=-2x+4 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入すると

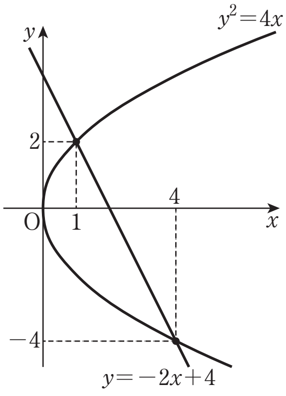
$(-2x+4)^2=4x$

$x^2-5x+4=0$　　　$x=1,\ 4$

このとき②より

$x=1$ のとき　$y=2$　　　$x=4$ のとき　$y=-4$

よって，共有点の座標は $(1,\ 2)$，$(4,\ -4)$



要点 ②　2 次曲線と直線の共有点の個数

2 次曲線 $f(x,\ y)=0$　……①と直線 $ax+by+c=0$　……②の共有点の個数は，

①と②から 1 文字を消去して得られる方程式が 2 次方程式の場合，その判別式を D とすると

$D>0$　⟺　異なる 2 つの実数解をもつ

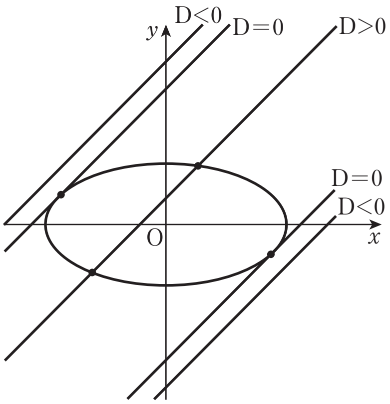
　　　⟺　①と②の共有点の個数は 2 個

$D=0$　⟺　1 つの実数解(重解)をもつ

　　　⟺　①と②の共有点の個数は 1 個

$D<0$　⟺　実数解なし

　　　⟺　①と②の共有点の個数は 0 個



特に $D=0$ のとき，直線は 2 次曲線に「接する」といい，この直線を 2 次曲線の「接線」，共有点を「接点」という。

※①と②を連立させた方程式が 1 次方程式の場合は，その方程式が

　1 つの実数解をもつ　⟺　①と②の共有点の個数は 1 個

[MEMO]

1 (1) 次の曲線と直線の共有点の座標を求めよ。

(i) $y^2=6x$，$x-2y+6=0$

(ii) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$，$3x-2y-2=0$

(2) k を定数とする。楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の共有点の個数を求めよ。

Point Pickup

2次曲線と直線の共有点

2次曲線と直線の共有点の座標は，方程式を連立させた連立方程式の「　　　　」によって得られる。

1文字消去して得られる方程式が2次方程式の場合

$D>0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個

$D=0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個（接する）

$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 共有点の個数は「　」個

第 2 講 PART1 確認問題

1 放物線 $y^2=4x$ と直線 $x-y+1=0$ の共有点の座標は，

$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$ である。

2 楕円 $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1$ と直線 $x-2y+2=0$ の共有点の x 座標

は，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エオ}}$ である。

3 k を定数とする。

双曲線 $3x^2-y^2=3$ と直線 $y=2x+k$ の共有点の個数は，

$-\boxed{\text{カ}}<k<\boxed{\text{カ}}$ のとき，　$\boxed{\text{キ}}$ 個

$k=\pm\boxed{\text{カ}}$ のとき，　$\boxed{\text{ク}}$ 個

$k<-\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{カ}}<k$ のとき，　$\boxed{\text{ケ}}$ 個

である。

PART2　２次曲線の接線

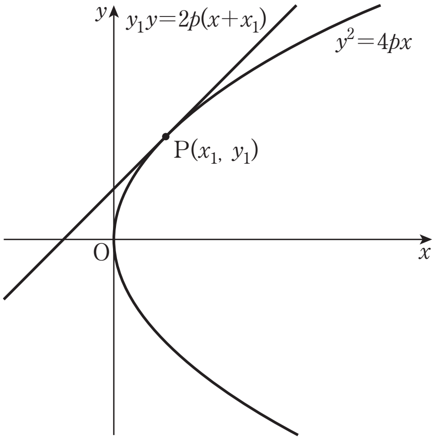
要点整理と公式

要点 ①　２次曲線の接線の方程式

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

で表される。



(証明)

$$\begin{cases} y^2=4px & \cdots\cdots① \\ y_1y=2p(x+x_1) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より $y^2=2\cdot 2px$　……①′

②より $2px=y_1y-2px_1$　……②′

①′ に②′ を代入して x を消去すると

$$y^2=2(y_1y-2px_1) \qquad y^2-2y_1y+4px_1=0 \quad \cdots\cdots③$$

また，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は放物線①上の点より

$$y_1{}^2=4px_1 \quad \cdots\cdots④$$

④を③に代入して

$$y^2-2y_1y+y_1{}^2=0 \qquad (y-y_1)^2=0 \qquad y=y_1$$

よって，2 次方程式③が重解 $y=y_1$ をもつので，直線 $y_1y=2p(x+x_1)$ は，放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線である。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

であることが知られている。

[MEMO]

2 (1) 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(i) $y^2=8x$ $(2,\ -4)$　　(ii) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(\sqrt{3},\ \sqrt{2})$

(iii) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ $(2,\ 2\sqrt{3})$　　(iv) $x^2-2y^2=-2$ $(-4,\ 3)$

(2) 点 $(0,\ 2)$ から楕円 $2x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

2次曲線上の点における接線

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $y_1y=2p(x+x_1)$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

イメージとしては，2次曲線の式の y を1つだけ y_1 に，x を1つだけ x_1 に変えたもの。

2次曲線上にない点 $(a,\ b)$ から引いた接線

① 2次曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式が点 $(a,\ b)$ を通る，と考える。

② 点 $(a,\ b)$ を通る直線が2次曲線に接する，と考える。

第 2 講 PART2 確認問題

1 放物線 $y^2=16x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は，

$y=$ [ア] $x+$ [イ] である。

2 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式

は，$y=$ [ウ] $x-$ [エ] である。

3 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程

式は，$y=-$ [オ] $x-$ [カ] である。

4 双曲線 $2x^2-y^2=-4$ 上の点 $(4,\ 6)$ における接線の方程

式は，[キ] $x-$ [ク] $y+2=0$ である。

5 点 $(0,\ 4)$ から楕円 $4x^2+y^2=8$ に引いた接線の方程式は，

$y=$ [ケ] $x+$ [コ]

$y=-$ [ケ] $x+$ [コ]

である。

第 3 講　2 次曲線と離心率，媒介変数表示

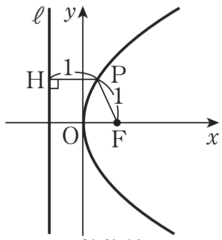
PART1 2 次曲線と離心率

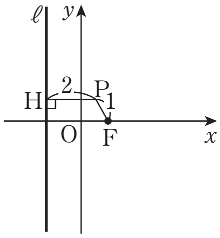
要点整理と公式

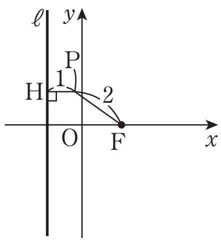
要点 ① 2 次曲線の離心率

放物線は，定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離が等しい，すなわち距離の比が 1：1 である点 P の軌跡である。

定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が 1：1 以外の場合の，点 P の軌跡について考える。







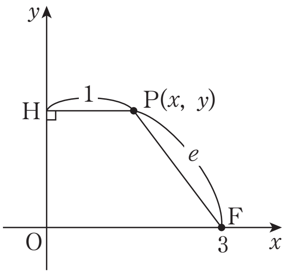
(ex) e を正の定数とする。点 F(3, 0) からの距離と，y 軸からの距離の比が e：1 である点 P$(x,\ y)$ の軌跡を考える。

点 P から y 軸に下ろした垂線を PH とする。

PF：PH＝e：1 より ePH＝PF　　つまり e^2PH^2＝PF^2

$$e^2x^2=(x-3)^2+y^2$$

$$(1-e^2)x^2-6x+y^2+9=0$$



$e=1$ のとき　$y^2=6x-9$

よって「　　　　」 $y^2=6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$

$e=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\dfrac{3}{4}x^2-6x+y^2+9=0$　　$3(x-4)^2+4y^2=12$

よって「　　　」 $\dfrac{(x-4)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

$e=2$ のとき　$-3x^2-6x+y^2+9=0$　　$3(x+1)^2-y^2=12$

よって「　　　　」 $\dfrac{(x+1)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$

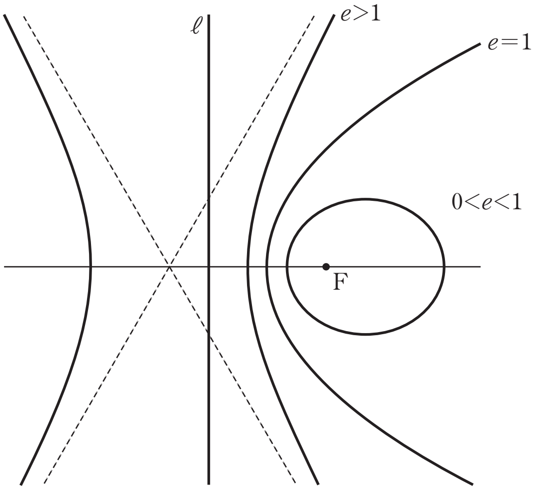
一般に，定点Fからの距離と，Fを通らない定直線ℓからの距離の比が$e:1$である点Pの軌跡は，Fを1つの焦点とする2次曲線であり

$0<e<1$のとき　楕円

$e=1$のとき　放物線

$e>1$のとき　双曲線

であることが知られている。



このeの値を，2次曲線の「離心率」といい，直線ℓを「準線」という。

1 点 F(5, 0) からの距離と，直線 $x=-1$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1) 1：1　　(2) 1：2　　(3) 2：1

Point Pickup

2 次曲線の離心率と軌跡

定点 F からの距離と，F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が

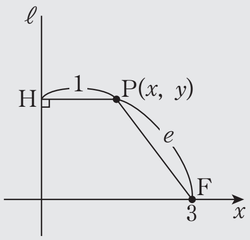
e：1 である点 P の軌跡は

$0<e<1$ のとき　楕円

$e=1$ のとき　放物線

$e>1$ のとき　双曲線

この e の値を，2 次曲線の「離心率」という。



第 3 講 PART1 確認問題

点 F(1, 0) からの距離と，直線 $x=-2$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

1 1：1

軌跡：放物線 $y^2=\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$

2 1：2

軌跡：楕円 $\dfrac{\left(x-\boxed{\text{ウ}}\right)^2}{\boxed{\text{エ}}}+\dfrac{y^2}{\boxed{\text{オ}}}=1$

3 2：1

軌跡：双曲線 $\dfrac{\left(x+\boxed{\text{カ}}\right)^2}{\boxed{\text{キ}}}-\dfrac{y^2}{\boxed{\text{クケ}}}=1$

PART2 2次曲線の媒介変数表示

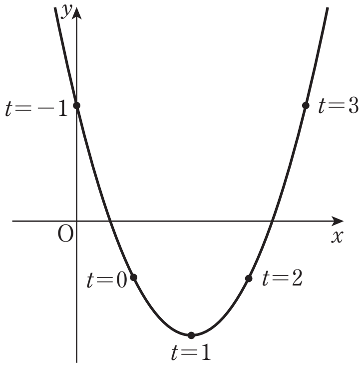
要点整理と公式

要点① 媒介変数表示

座標平面上において，点Pの x 座標，y 座標が，変数 t によって

$$\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^2-2t-1 \end{cases} \quad \cdots\cdots①$$

で表されるとき，$t=-1$，0，1，2，3 に対応する点Pの座標はそれぞれ (0，2)，(1，−1)，(2，−2)，(3，−1)，(4，2) となる。さらに，いろいろな t の値に対する点Pを座標平面上にとることにより，点Pの軌跡を描くことができる。



一般に，座標平面上の曲線が変数 t によって

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

の形に表されるとき，これをその曲線の「　　　　　　」(「パラメータ表示」)といい，t を「　　　　」(パラメータ)という。

①から t を消去すると

$$y=(x-1)^2-2(x-1)-1 \quad つまり \quad y=x^2-4x+2$$

となる。また，t がすべての実数値をとるとき，x もすべての実数値をとる。

よって，①は放物線 $y=x^2-4x+2$ の媒介変数表示である。

媒介変数による曲線の表示方法は1通りではなく，$x=t$，$y=t^2-4t+2$ もまた，放物線 $y=x^2-4x+2$ の媒介変数表示である。

(ex) 媒介変数表示 $x=2t^2$，$y=4t$ で表される曲線

$y=4t$ より $t=$

これを $x=2t^2$ に代入して $x=2\cdot\left(\quad\right)^2$ 　よって「　　　　」$y^2=8x$

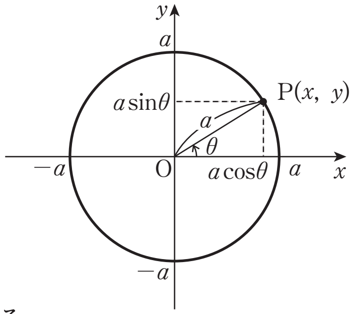
要点② 三角関数を用いた媒介変数表示

媒介変数については，一般角 θ を用いるものもある。

原点Oを中心とする半径 a の円 $x^2+y^2=a^2$ ……②

上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，動径OPが x 軸の正の向きとなす角を θ とすると

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$



と表すことができる。これは，円②の媒介変数表示である。

なお，θ は弧度法で表すこととする。

(ex) 円 $x^2+y^2=16$ を媒介変数 θ を用いて表すと $\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$

$x^2+y^2=a^2$ を y について解くと　$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと　$y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

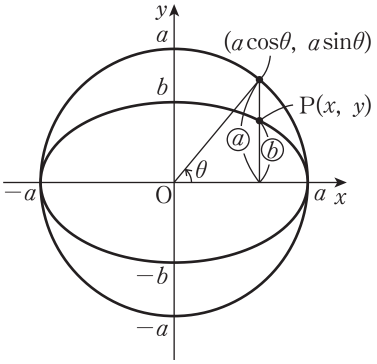
$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

よって，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，円 $x^2+y^2=a^2$ を

y 軸方向に　　倍した曲線であることがわかる。

したがって，楕円の媒介変数表示は

$x=a\cos\theta$，$y=\quad\cdot a\sin\theta$　　つまり $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$



である。この θ は，図のOPと x 軸の正の方向がなす角ではないことに注意。

要点③ 媒介変数表示される曲線の平行移動

媒介変数表示 $x=2\cos\theta+1$，$y=3\sin\theta-1$ はどのような曲線を表すか考える。

$\cos\theta=\dfrac{x-1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{y+1}{3}$　これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$，つまり媒介変数表示 $x=$　　　，$y=$　　　で表される

楕円を x 軸方向に　，y 軸方向に　　平行移動した楕円を表す。

2 (1) 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(i) $x=t-1$，$y=t^2-2$　　(ii) $x=t+2$，$y=\sqrt{t}$

(iii) $x=4\cos\theta$，$y=2\sin\theta+3$　　(iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$

(2) 角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

(i) $x^2+y^2=25$　　(ii) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$　　(iii) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

Point Pickup

媒介変数表示

平面上の曲線 C が，変数 t によって

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

の形で表されるとき，これを曲線 C の媒介変数表示(パラメータ表示)といい，

変数 t を媒介変数(パラメータ)という。

媒介変数を消去して x，y の式を求められる場合がある。

特に，媒介変数が一般角 θ で表される場合は，三角関数の相互関係を用いるとよい。

2次曲線の媒介変数表示

放物線　$y^2=4px$　…　$x=pt^2$，$y=2pt$

円　$x^2+y^2=a^2$　…　$x=$　　　，$y=$

楕円　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…　$x=$　　　，$y=$

双曲線　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　…　$x=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$y=b\tan\theta$

第 3 講　PART2 確認問題

次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$x=t+2$，$y=t^2-4$　［ア］

①　直線 $y=x+2$　②　放物線 $y=x^2-4x$

③　放物線 $y=x^2-4$　④　放物線 $y=x^2-4x+4$

2　$x=\sqrt{t}$，$y=t-3$　［イ］

①　直線 $y=x-3$　②　放物線 $y=x^2+5$

③　放物線 $y=x^2-3$ の $x\geqq 0$ の部分

④　放物線 $y=x^2-3$ の $y\geqq 0$ の部分

3　$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta-1$　［ウ］

①　円 $x^2+(y+1)^2=13$

②　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

③　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$

④　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$

4　$x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=2\tan\theta$　［エ］

①　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

②　双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=-1$

③　双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

④　楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

5 $x^2+y^2=9$ 　オ

① $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

② $x=3\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

③ $x=9\cos\theta$，$y=9\sin\theta$

④ $x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$

6 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 　カ

① $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$

② $x=\dfrac{1}{2}\cos\theta$，$y=\dfrac{1}{3}\sin\theta$

③ $x=2\cos\theta$，$y=3\sin\theta$

④ $x=4\cos\theta$，$y=9\sin\theta$

7 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ 　キ

① $x=\dfrac{\cos\theta-1}{3}$，$y=\dfrac{\sin\theta+2}{4}$

② $x=\cos\theta+1$，$y=\sin\theta-2$

③ $x=3\cos\theta-1$，$y=4\sin\theta+2$

④ $x=3\cos\theta+1$，$y=4\sin\theta-2$

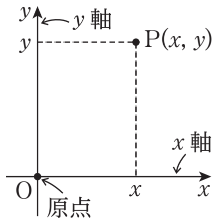
[MEMO]

第 4 講　極座標と極方程式

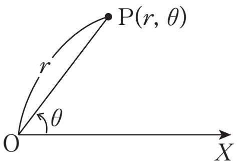
PART1 極座標と直交座標

要点整理と公式

要点 ① 極座標



これまで平面上の点の位置は，原点 O で直交する 2 つの軸 (x 軸，y 軸) をとり，x 座標と y 座標の組 $(x,\ y)$ で表してきた。これを「　　　　　」という。ここでは，これと異なる平面上の点の表し方を考える。



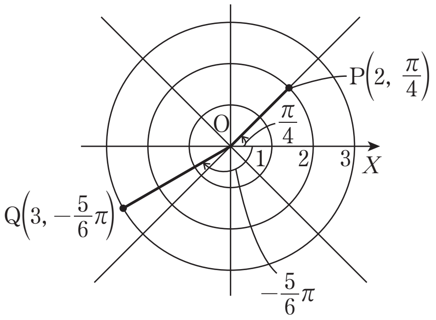
平面上に点 O と半直線 OX を定めると，平面上の点 P の位置は，OP の長さ r と，OX から OP へ測った角 θ で決まる。このとき，2 つの数の組 (　,　) を，点 P の「　　　　」といい，点 O を「　」，半直線 OX を「始線」，θ を「　　　」という。

なお，θ は弧度法で表された一般角である。

極座標で表された 2 点

$$\mathrm{P}\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right),\ \mathrm{Q}\left(3,\ -\frac{5}{6}\pi\right)$$

を図示すると右の図のようになる。



極座標では $(r,\ \theta)$ と $(r,\ \theta+2\pi\times n)$ (n は整数) は同じ点を表す。よって，偏角 θ の範囲を $0\leqq\theta<2\pi$ のように制限すると，1 通りに定まる。

極 O を極座標で表すと，$(0,\ \theta)$ (θ は任意の値) となる。

※極座標 $(r,\ \theta)$ においては，一般的には $r\geqq 0$ であるが，後述の極方程式においては，$r<0$ の場合も考える。

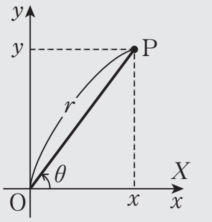
要点 ②　極座標と直交座標

極座標と直交座標には，三角関数の定義より以下の①，②の関係が成り立つ。

極座標と直交座標①

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$$① \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

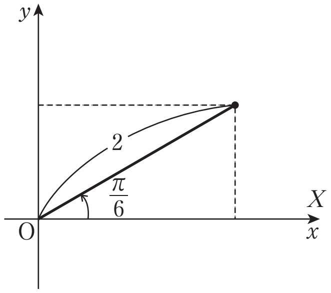


(ex) 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ である点の直交座標

$$x = 2 \qquad = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = 2 \qquad = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

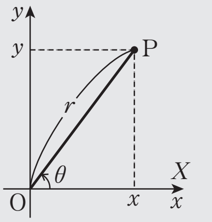
よって　$(\sqrt{3},\ 1)$



極座標と直交座標②

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$$② \begin{cases} r = \\ \cos\theta = \qquad ,\quad \sin\theta = \end{cases}$$



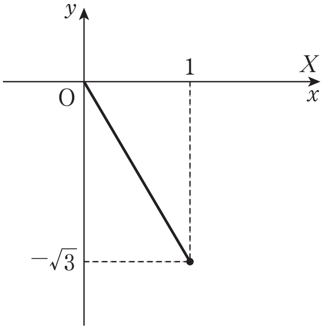
(ex) 直交座標が $(1,\ -\sqrt{3})$ である点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$r = \qquad\qquad = 2$$

よって $\cos\theta = \quad ,\ \sin\theta =$

これを満たす $\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は $\theta = \dfrac{5}{3}\pi$

したがって　$\left(2,\ \dfrac{5}{3}\pi\right)$



1 (1) 極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(i) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(ii) $(2,\ \pi)$　　(iii) $\left(3,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) 直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

(i) $(-1,\ -1)$　　(ii) $(0,\ -3)$　　(iii) $(\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$

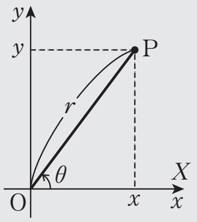
Point Pickup

極座標と直交座標

点 P の直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とする。

$(r,\ \theta) \to (x,\ y)$ … $\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$

$(x,\ y) \to (r,\ \theta)$ … $\begin{cases} r = \\ \cos\theta = \quad ,\ \sin\theta = \end{cases}$



第 4 講 PART1 確認問題

極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ ア

① $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ ② $(2,\ \sqrt{3})$
③ $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ ④ $(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

2 $(3,\ \pi)$ イ

① $(0,\ 3)$ ② $(0,\ -3)$
③ $(3,\ 0)$ ④ $(-3,\ 0)$

3 $\left(4,\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$ ウ

① $(1,\ -\sqrt{3})$ ② $(\sqrt{3},\ -1)$
③ $(2,\ -2\sqrt{3})$ ④ $(2\sqrt{3},\ -2)$

直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

4 $(-1,\ \sqrt{3})$ エ

① $\left(1,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ ② $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$
③ $\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$ ④ $\left(2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$

5 $(0,\ 4)$ オ

① $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ ② $\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$
③ $(2,\ \pi)$ ④ $(4,\ \pi)$

6 $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ カ

① $\left(1,\ \frac{3}{4}\pi\right)$　② $\left(\sqrt{2},\ \frac{5}{4}\pi\right)$

③ $\left(2,\ \frac{5}{4}\pi\right)$　④ $\left(2,\ \frac{7}{4}\pi\right)$

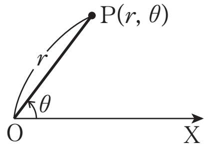
[MEMO]

PART2 極方程式

要点整理と公式

要点 ① 極方程式

平面上のある曲線が，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いた式で表されるとき，その方程式を曲線の「極方程式」という。

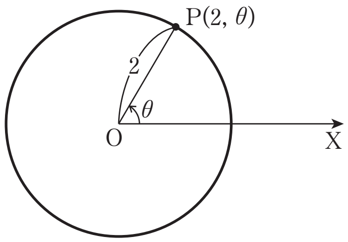


(ex) 極方程式 $r=2$ が表す曲線

曲線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

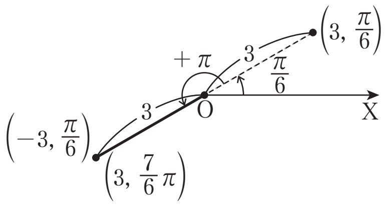
$r=2$，θ は任意の値

よって，この極方程式は，極Oを中心とする半径2の円を表す。



極方程式において，$r<0$ のときの極座標 $(r,\ \theta)$ は，極座標が $(\ \ r\ ,\ \theta\ \ \ \ \ )$ である点を表すと考える。

たとえば，極座標 $\left(-3,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ は，点 $\left(\ \ \ ,\ \dfrac{\pi}{6}\ \ \ \ \ \right)$，すなわち点 $\left(3,\ \dfrac{7}{6}\pi\right)$ を表す。

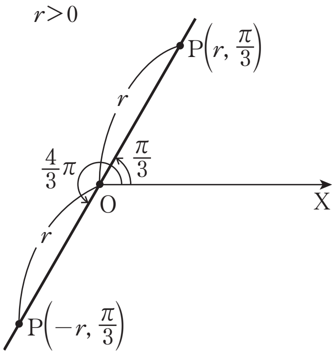


(ex) 極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ が表す曲線

曲線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

r は任意の値，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，この極方程式は，点Oを通り，始線OXと $\dfrac{\pi}{3}$ の角をなす直線を表す。



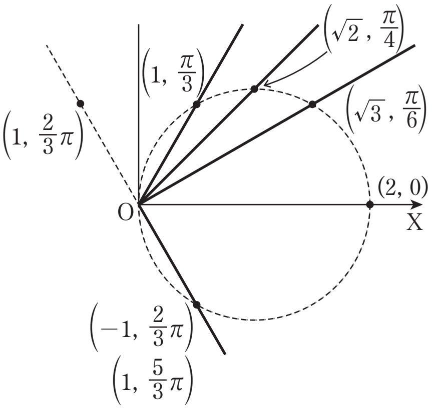
要点② いろいろな図形の極方程式

ある曲線が，極方程式

$r=f(\theta)$ や $F(r,\ \theta)=0$

で表されるときの図形の方程式について考える。

(ex) 極方程式 $r=2\cos\theta$ が表す曲線



曲線上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$\theta=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ のとき，それぞれ

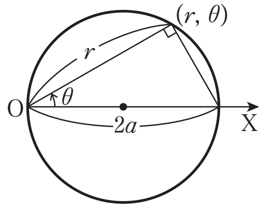
$r=2,\ \sqrt{3},\ \sqrt{2},\ 1,\ 0$

また，$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき $r=-1$

極座標 $\left(-1,\ \frac{2}{3}\pi\right)$ は，点 $\left(1,\ \frac{5}{3}\pi\right)$ を表す。

いくつかの点を具体的にとることで，曲線の概形を描くことができる。

要点③ 極方程式と直交座標

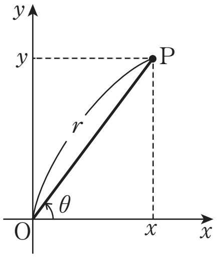


一般に，中心が $(a,\ 0)$，半径が a の円を表す極方程式は

$r=2a\cos\theta$

である。このことは右図からわかる。

極方程式 $r=2a\cos\theta$ を，直交座標の x，y の方程式で表す。



$r=2a\cos\theta$ より $r^2=2ar\cos\theta$

曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$r^2=$ 　　　，$r\cos\theta=$ 　より

$x^2+y^2=2ax$

よって　$(x-a)^2+y^2=a^2$

双曲線 $x^2-y^2=9$ を極方程式で表す。

曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$x=$ 　　　，$y=$ 　　　より

$(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2=9$ 　　　　$r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=9$

よって　$r^2\cos 2\theta=9$

2 (1) 極座標が $\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。

(2) 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(i) $r=4$　　(ii) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

(iii) $r=5\cos\theta$　　(iv) $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=3$

(3)(i) 極方程式 $r=\sin\theta$ を直交座標の x, y の方程式で表せ。

(ii) 楕円 $x^2+5y^2=1$ を極方程式で表せ。

Point Pickup

極方程式

曲線上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とし，$r=f(\theta)$ や $F(r,\ \theta)=0$ などの r，θ に関する方程式を作る。条件を図示し，「　　　　　　」に注目するとよい。

円・直線の極方程式

中心が極 O，半径が a の円	…	$r=a$
中心が $(a,\ 0)$，半径が a の円	…	$r=2a\cos\theta$
極 O を通り，始線と α の角をなす直線	…	$\theta=\alpha$
点 $A(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線	…	$r\cos(\theta-\alpha)=a$ $(a>0)$

第 4 講　PART2 確認問題

1　極座標が $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$ である点 A を通り，直線 OA に垂直な直線 l の極方程式を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［ア］

① $r=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　② $r\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=4$

③ $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=4$　④ $r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=4$

2　極方程式 $r=6$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［イ］

① 中心が極 O，半径が 3 の円

② 中心が極 O，半径が 6 の円

③ 極 O を通り，半径が 3 の円

④ 極 O を通り，半径が 6 の円

3　極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。［ウ］

① 中心が極 O，半径が $\dfrac{\pi}{4}$ の円

② 極 O を通り，半径が $\dfrac{\pi}{4}$ の円

③ 極 O を通り，始線 OX に垂直な直線

④ 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

4 極方程式 $r=6\cos\theta$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 エ

① 中心が極 O，半径が 6 の円

② 中心が (3，0)，半径が 3 の円

③ 中心が (3，0)，半径が 6 の円

④ 中心が (6，0)，半径が 6 の円

5 極方程式 $r\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=2$ の表す曲線を求めよ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 オ

① 極 O を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

② 極座標が (2，0) である点を通り，始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線

③ 極座標が $\left(1,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

④ 極座標が $\left(2,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

6 極方程式 $r=\sin\theta+\cos\theta$ の表す曲線を，直交座標に関する方程式で表せ。答えは次の①～④のうちから選べ。

カ

① $x+y=1$　　② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+y^2+x+y=0$　　④ $x^2+y^2-x-y=0$

7 楕円 $2x^2+y^2=1$ を極方程式で表せ。

答えは次の①～④のうちから選べ。 キ

① $r^2=1+\cos^2\theta$　　② $r^2(1+\sin^2\theta)=1$

③ $r^2(1+\cos^2\theta)=1$　　④ $r^2(2-\cos^2\theta)=1$

【MEMO】

第 5 講　複素数平面

PART1 複素数平面

要点整理と公式

要点 ① 複素数と複素数平面

「複素数」… a，b を実数，i を虚数単位として $a+bi$ の形で表される数。

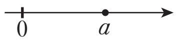
a を実部，b を虚部という。

$b=0$ のとき $a+0i$ すなわち a は実数を表す。

$b\neq 0$ のとき $a+bi$ を虚数という。

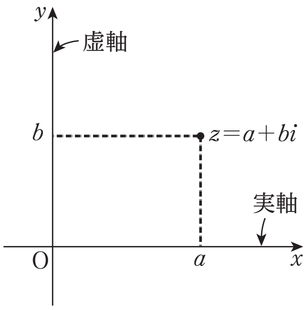
特に $a=0$，$b\neq 0$ のとき $0+bi$ すなわち bi を純虚数という。

数直線上では，1 つの点に 1 つの実数が対応している。ここでは，複素数を座標平面上の点に対応させることを考える。



座標平面上で，複素数 $z=a+bi$ に対して点 $(a,\ b)$ を対応させる。これにより，複素数と座標平面上の点は，1 対 1 に対応する。

複素数 $z=a+bi$ を座標平面上 $(a,\ b)$ に対応させるとき，この座標平面を「　　　　　」(複素平面，ガウス平面) という。



複素数平面上では，x 軸を「　　」，y 軸を「　　」という。実軸上の点は実数を表し，原点 O は実数 0 を表す。また，原点 O を除く虚軸上の点は純虚数を表す。

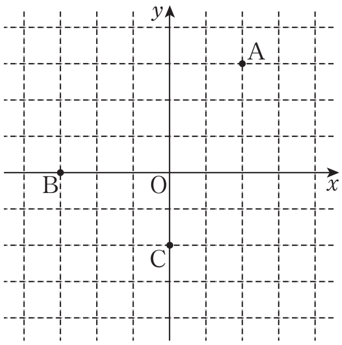
複素数平面上では，複素数 z に対応する点 P を　　　，または単に点　　と表す。

(ex) 右図において

点 A は A(　　　) と表す。また，点　　　　と表す。

点 B は B(　　) と表す。また，点　　　と表す。

点 C は C(　　) と表す。また，点　　　と表す。



要点② 複素数の実数倍

複素数 $z=a+bi$ は0でないとする。このとき，kz(k は実数)が表す点について考える。

$$kz=ka+(kb)i$$

であるから，A(z)，B(kz) とすると，3 点 O，A，B は一直線上にあり，

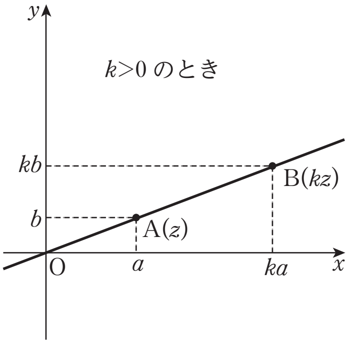
$k>0$ のとき　原点 O に関して B は A と同じ側

$k<0$ のとき　原点 O に関して B は A と反対側

にある。また，$k=0$ のとき，B は O と一致する。

また，$\mathrm{OB}=|k|\mathrm{OA}$ である。

直線 OA 上の任意の点は，kz の形の複素数を表す。



以上のことより，$\alpha \neq 0$ のとき，次のことが成り立つ。

3 点 0，α，β が一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\beta=k\alpha$ を満たす実数 k が存在する

要点③ 複素数の加法・減法

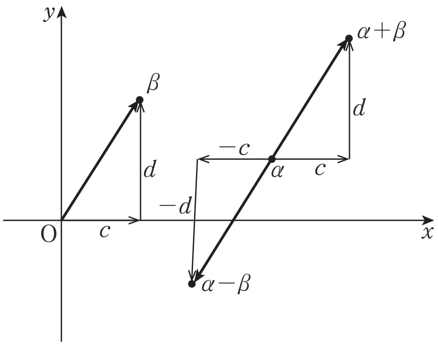
2 つの複素数 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ の和，差を複素数平面上で考える。

$$\alpha+\beta=(a+bi)+(c+di)$$
$$=(a+c)+(b+d)i$$

したがって，点 $\alpha+\beta$ は，点 α を実軸方向に c，虚軸方向に d だけ平行移動した点である。

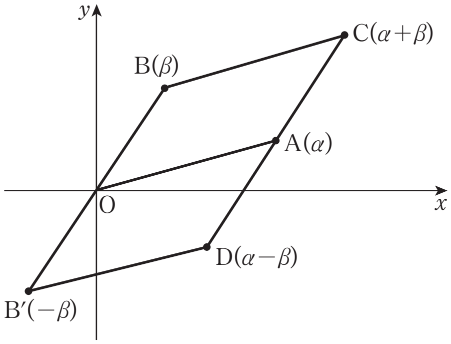
$$\alpha-\beta=(a+bi)-(c+di)$$
$$=(a-c)+(b-d)i$$

したがって，点 $\alpha-\beta$ は，点 α を実軸方向に $-c$，虚軸方向に $-d$ だけ平行移動した点である。



3 点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，点 C($\alpha+\beta$) は，2 辺 OA，OB でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点である。

また，B′($-\beta$) とすると，点 D($\alpha-\beta$) は，2 辺 OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点である。



1 (1) $\alpha=3-i$，$\beta=x+3i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

(2) $\alpha=2+3i$，$\beta=-2+i$ であるとき，次の複素数を表す点を図示せよ。

(i) $\alpha+\beta$　　(ii) $\alpha-\beta$　　(iii) $\alpha+2\beta$

Point Pickup

複素数の実数倍

$\alpha \neq 0$ のとき

3 点 0，α，β が一直線上にある $\iff$ $\beta=k\alpha$（k は実数）

複素数の加法・減法

3 点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき

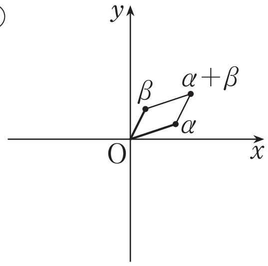
・点 C($\alpha+\beta$) は，2 辺 OA，OB でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点

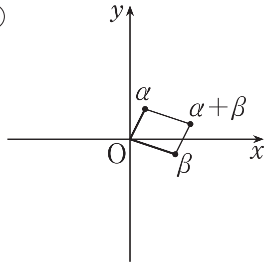
・B′($-\beta$) とすると，点 D($\alpha-\beta$) は，2 辺 OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点

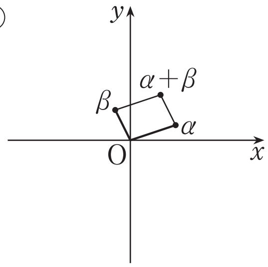
第 5 講　PART1 確認問題

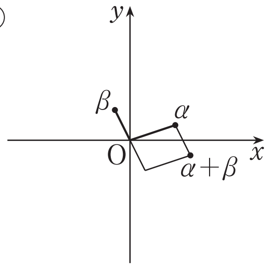
1 $\alpha=2+3i$，$\beta=x-6i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$x=$ ［アイ］ である。

2 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$\alpha+\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。［ウ］

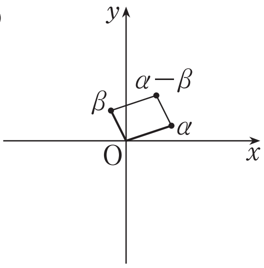
①


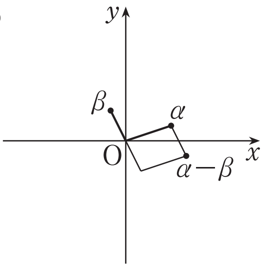
②


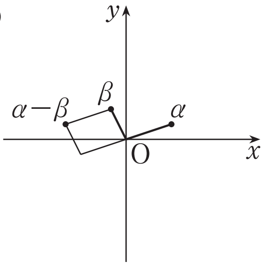
③


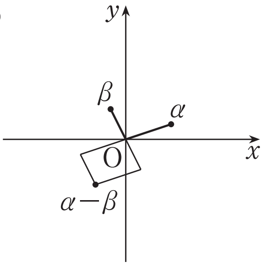
④


3 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$\alpha-\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。 エ

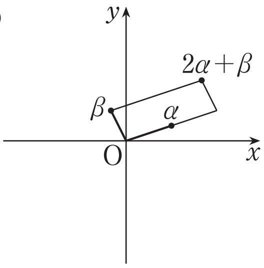
①


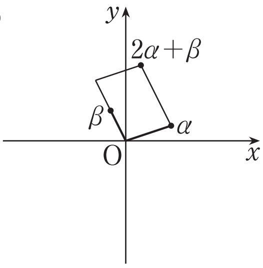
②


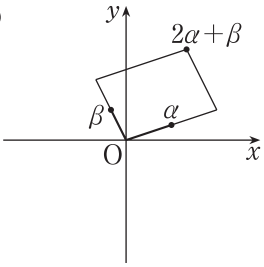
③


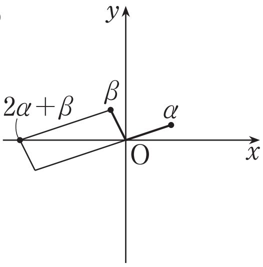
④


4 $\alpha=3+i$，$\beta=-1+2i$ とする。$2\alpha+\beta$ を表す点を，下の①～④のうちから選べ。 オ

①


②


③


④


[MEMO]

PART2 共役複素数の性質

要点整理と公式

要点① 共役な複素数の性質

複素数 $z=a+bi$ に対し，$a-bi$ を z に「　　　」な複素数といい，　　と表す。また，$\overline{z}$ は z の「　　　複素数」という。

複素数 α，β と，共役な複素数 $\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ について，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質①

[1] $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$　　[2] $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$

[3] $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$　　[4] $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$ とする。

$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$ より $\overline{\alpha+\beta}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=(a-bi)+(c-di)=(a+c)-(b+d)i$　　よって，[1]が成立

$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i$ より $\overline{\alpha-\beta}=\overline{(a-c)+(b-d)i}=(a-c)-(b-d)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}=(a-bi)-(c-di)=(a-c)-(b-d)i$　　よって，[2]が成立

$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=$　　　　　　　　より

$\overline{\alpha\beta}=(ac-bd)-(ad+bc)i$

$\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=(a-bi)(c-di)=ac-adi-bci+bdi^2=(ac-bd)-(ad+bc)i$

よって，[3]が成立

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i \text{ より}$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}=\frac{a-bi}{c-di}=\frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)}=\frac{ac+adi-bci+bd}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

よって，[4] が成立

[3] より，複素数 α について $\overline{\alpha^n}=(\overline{\alpha})^n$ が成り立つ。

複素数 $z=a+bi$ に対して

$\overline{z}=a-bi$

$-z=-a-bi$

$-\overline{z}=-a+bi$

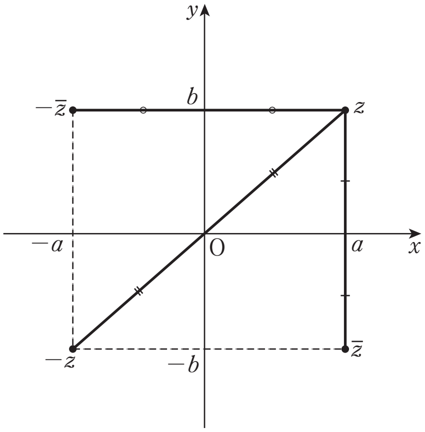
である。これらを複素数平面上に図示すると，

次のことが成り立つ。

点 z と点 $\overline{z}$ は　　　　に関して対称

点 z と点 $-z$ は　　　　に関して対称

点 z と点 $-\overline{z}$ は　　　　に関して対称



また，このことより，次のことが成り立つ。

共役な複素数の性質②

z が実数　$\iff$　$\overline{z}=z$

z が純虚数　$\iff$　$\overline{z}=-z$ かつ $z\neq 0$

このことは，次のように示すこともできる。

複素数 $z=a+bi$ … ①に対して，$\overline{z}=a-bi$ … ②

①＋②より $z+\overline{z}=2a$　　　よって $a=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$

①－②より $z-\overline{z}=2bi$　　　よって $b=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

したがって，複素数 $z=a+bi$ が

実数　$\iff$　$b=0$　$\iff$　$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}=0$　$\iff$　$\overline{z}=z$

純虚数　$\iff$　$a=0$　$\iff$　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=0$　$\iff$　$\overline{z}=-z$　　　（ただし $z\neq 0$）

(ex) 複素数 α，β について，$\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta\,(\neq 0)$ が純虚数であることを示す。

$z=\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta$ とおくと，$z\neq 0$

$$\overline{z}=\overline{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\overline{\beta}}-\overline{\overline{\alpha}}\,\overline{\beta}=\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}=-(\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta)=-z$$

よって，z は純虚数である。

2 (1) 複素数 z が $2z+\overline{z}=4+i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(i) $2\overline{z}+z$ を求めよ。 (ii) z を求めよ。

(2) 点 $-2+3i$ と実軸，原点，虚軸に関して対称な点を表す複素数を求めよ。

Point Pickup

共役な複素数の性質①

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$，$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\ \overline{\beta}$，$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

共役な複素数の性質②

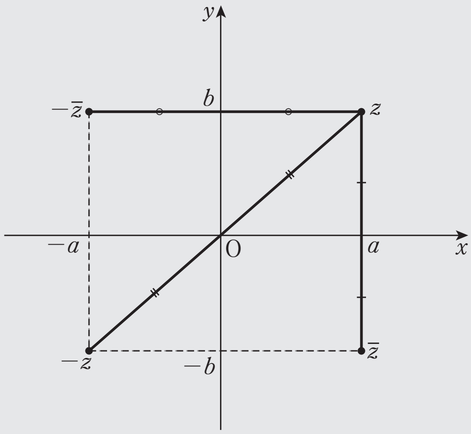
点 z と実軸に関して対称な点は点

点 z と原点に関して対称な点は点

点 z と虚軸に関して対称な点は点

z が実数 $\iff$ $\overline{z}=z$

z が純虚数 $\iff$ $\overline{z}=-z$ かつ $z\neq 0$



第 5 講　PART2 確認問題

1 複素数 z が $z+2\overline{z}=3-4i$ を満たすとき，$\overline{z}+2z$ の値は

[ア] である。したがって，$z=$ [イ] である。

[ア]，[イ] は下の①～④のうちから選べ。

［[ア] の選択肢］

① $3+4i$　② $3-4i$

③ $-3+4i$　④ $-3-4i$

［[イ] の選択肢］

① $1+2i$　② $1+4i$

③ $-1-4i$　④ $3+12i$

2 点 $-5+3i$ と実軸に関して対称な点を表す複素数は [ウ]

である。

[ウ] は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　② $5-3i$

③ $-5-3i$　④ $-3+5i$

3 点 $-5+3i$ と原点に関して対称な点を表す複素数は [エ]

である。

[エ] は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　② $5-3i$

③ $-5-3i$　④ $3-5i$

4 点 $-5+3i$ と虚軸に関して対称な点を表す複素数は オ である。

オ は下の①～④のうちから選べ。

① $5+3i$　　② $5-3i$

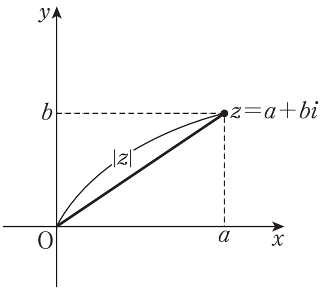
③ $-5-3i$　　④ $3-5i$

[MEMO]

PART3 複素数の絶対値の性質

要点整理と公式

要点 ① 複素数の絶対値と 2 点間の距離

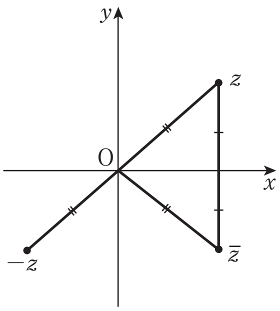


点 z と原点 O との距離を，複素数 z の「　　　　」といい，　で表す。

$z=a+bi$ のとき，$|z|=|a+bi|=$

(ex) $3-2i$ の絶対値は

$|3-2i|=$　　　　　　$=\sqrt{13}$



原点 O と点 z，$-z$，$\overline{z}$ の位置関係より，次のことが成り立つ。

$|z|=|-z|=|\overline{z}|$

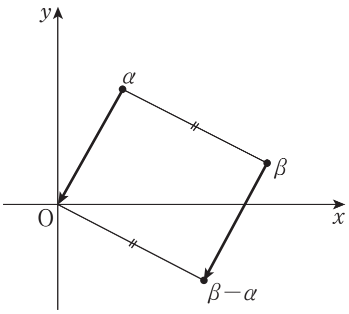
また，$z=a+bi$ のとき，$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ であることから

$z\overline{z}=|z|^2$

が成り立つ。さらに，$|z|\geqq 0$(等号成立は $z=0$ のとき)であることを用いると，

$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

が成り立つ。



点 α を原点 O に移す平行移動によって点 β を移すと，点 β は点 $\beta-\alpha$ に移る。このとき，4 点 O，α，β，$\beta-\alpha$ を頂点とする四角形は平行四辺形であることから，次のことがいえる。

2 点 α，β 間の距離は $|\beta-\alpha|$

(ex) 2 点 $\alpha=3-2i$，$\beta=1-i$ 間の距離は

$|\beta-\alpha|=|(1-i)-(3-2i)|=|-2+i|=$　　　　　　$=\sqrt{5}$

[MEMO]

3 (1) 次の複素数の絶対値を求めよ。

(i) $4+3i$　(ii) $-3+i$　(iii) $-4i$

(2) 次の 2 点間の距離を求めよ。

(i) $\mathrm{A}(5+6i)$, $\mathrm{B}(-7+i)$　(ii) $\mathrm{C}(-2)$, $\mathrm{D}(-4i)$

Point Pickup

複素数の絶対値

$z=a+bi$ のとき　$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

2 点間の距離

2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ 間の距離は $\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|$

第 5 講　PART3 確認問題

1 複素数 $3+4i$ の絶対値は [ア] である。

2 複素数 $-5+2i$ の絶対値は $\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$ である。

3 複素数 $-6i$ の絶対値は [エ] である。

4 2 点 $\mathrm{A}(3+i)$, $\mathrm{B}(-1+4i)$ 間の距離は [オ] である。

5 2 点 $\mathrm{A}(-5)$, $\mathrm{B}(-3i)$ 間の距離は $\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

第 6 講 複素数の極形式，乗法・除法

PART1 複素数の極形式

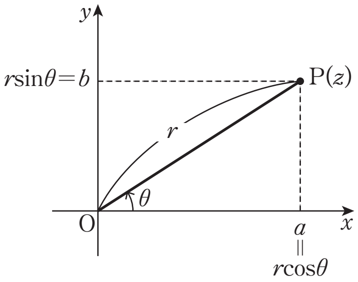
要点整理と公式

要点 ① 極形式

複素数平面上で，0 でない複素数 $z=a+bi$ が表す点を P とする。

OP $=r$ とし，実軸の正の部分を始線としたときの動径 OP が表す角を θ とすると

$a=$ 　　　，$b=$



であるから

$z=a+bi=r\cos\theta+(r\sin\theta)i=$

と表される。これを，複素数 z の「　　　　」という。

このとき $r=\sqrt{a^2+b^2}=$ 　　である。

また，θ を複素数 z の「　　　」といい，　　z（argument：アーギュメント）で表す。

偏角 θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ や $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲ではただ 1 通りに定まる。

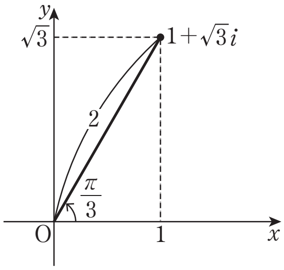
z の偏角の 1 つを θ とすると，一般的に　$\arg z=\theta+2\pi\times n$（$n$ は整数）と表される。

複素数の極形式

$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$

(ex) 複素数 $1+\sqrt{3}\,i$ を極形式で表す



$r=$ 　　　　　　$=2$

$\cos\theta=\dfrac{\quad}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\quad}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

よって，$1+\sqrt{3}\,i=$

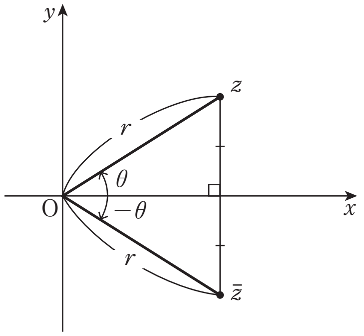
複素数 z と $\overline{z}$ は，実軸に関して対称であるから，
複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について

$$|\overline{z}|=|z|=\quad,\ \arg\overline{z}=-\arg z=$$

である。したがって

$$\overline{z}=\quad\{\cos(\quad)+i\sin(\quad)\}$$

である。



1　次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$-1+i$　　(2)　$\sqrt{3}-3i$　　(3)　$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　　(4)　$3i$

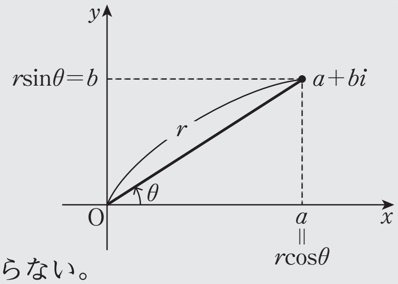
Point Pickup

複素数の極形式

$z \neq 0$ のとき　　$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$



複素数平面上に点を図示して考えるとよい。

※$z=0$ のとき，$r=0$ であるが，偏角 θ は定まらない。

第 6 講　PART1 確認問題

次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$-2+2i$　［ア］

①　$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　②　$2\sqrt{2}\left(\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi\right)$

③　$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$　④　$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

2　$1-\sqrt{3}\,i$　［イ］

①　$2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$　②　$\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi$

③　$2\left(\sin\frac{5}{3}\pi+i\cos\frac{5}{3}\pi\right)$　④　$2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

3　$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$　［ウ］

①　$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$　②　$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

③　$\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$　④　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

4　$-2i$　［エ］

①　$\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$　②　$2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

③　$2(\cos\pi+i\sin\pi)$　④　$2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

PART2 積・商の極形式

要点整理と公式

要点 ① 複素数の積・商の極形式

0 でない 2 つの複素数 z_1，z_2 が極形式でそれぞれ

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

と表されるとき，積 z_1z_2 の極形式は，三角関数の加法定理を用いると，次のようになる。

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+i\cos\theta_1\sin\theta_2+i\sin\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= \qquad \{\cos(\qquad\quad)+i\sin(\qquad\quad)\} \end{aligned}$$

よって，積 z_1z_2 の絶対値は r_1r_2，つまり z_1 と z_2 の絶対値の積であり，偏角は $\theta_1+\theta_2$，つまり z_1 と z_2 の偏角の　　である。

複素数の積の極形式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$$z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$$

同様に，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ の極形式は，次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{r_1\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)} \\ &= \qquad \{\cos(\qquad\quad)+i\sin(\qquad\quad)\} \end{aligned}$$

よって，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ の絶対値は $\dfrac{r_1}{r_2}$，つまり z_1 と z_2 の絶対値の商であり，偏角は $\theta_1-\theta_2$，つまり z_1 と z_2 の偏角の　　である。

複素数の商の極形式

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$

(ex) $z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$，$z_2=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき

$$z_1z_2=\qquad\left\{\cos\left(\qquad\right)+i\sin\left(\qquad\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi+i\sin\frac{23}{12}\pi\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\qquad\left\{\cos\left(\qquad\right)+i\sin\left(\qquad\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

2 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $\alpha = 1 - \sqrt{3}\,i$，$\beta = \sqrt{3} + i$　　(2) $\alpha = -2 + 2i$，$\beta = -\sqrt{3} - 3i$

Point Pickup

複素数の積・商の極形式

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ のとき

積　$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，　$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

商　$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$，　$\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

第 6 講　PART2 確認問題

$\alpha=-\sqrt{3}+i$，$\beta=1+\sqrt{3}\,i$ のとき，次の式を極形式で表せ。

ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$\alpha\beta=$ ア

①　$4(\cos\pi+i\sin\pi)$　　②　$4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$

③　$2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$　　④　$4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$

2　$\frac{\alpha}{\beta}=$ イ

①　$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$　　②　$\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$

③　$2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$　　④　$\cos\pi+i\sin\pi$

$\alpha=-1-i$，$\beta=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ のとき，次の式を極形式で表せ。

ただし，偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

答えは下の①～④のうちから選べ。

3　$\alpha\beta=$ ウ

①　$\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi$

②　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$

③　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$

④　$\sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$

4 $\dfrac{\alpha}{\beta} = $ エ

① $\cos\dfrac{13}{12}\pi + i\sin\dfrac{13}{12}\pi$

② $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{12}\pi + i\sin\dfrac{11}{12}\pi\right)$

③ $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi + i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{13}{12}\pi + i\sin\dfrac{13}{12}\pi\right)$

[MEMO]

PART3 複素数の積の図形的な意味

要点整理と公式

要点 ① 複素数の積の図形的な意味

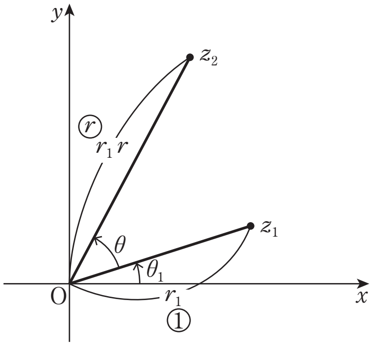
0 でない 2 つの複素数 z_1，α を，それぞれ

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad \alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とし，これらの積を z_2 とすると

$$z_2=z_1\alpha=\qquad\{\cos(\qquad)+i\sin(\qquad)\}$$

である。この点 z_2 は，点 z_1 を原点を中心に θ だけ回転し，さらに原点からの距離を r 倍した点である。



複素数の積と回転

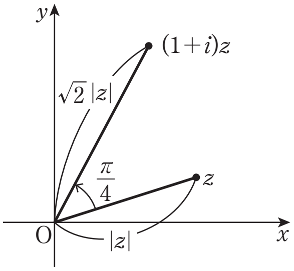
複素数 z と $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について，点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心として θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。

(ex) 点 $(1+i)z$ について

$$1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

であるから，点 $(1+i)z$ は，点 z を原点を中心に

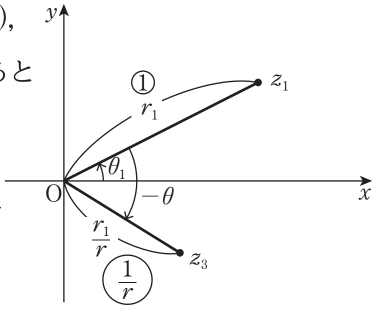
だけ回転し，原点からの距離を　　倍したものである。



また，0 でない 2 つの複素数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について，これらの商を z_3 とすると

$$z_3=\frac{z_1}{\alpha}=\frac{r_1}{r}\{\cos(\theta_1-\theta)+i\sin(\theta_1-\theta)\}$$

である。この点 z_3 は，点 z_1 を原点を中心に $-\theta$ だけ回転し，さらに原点からの距離を $\dfrac{1}{r}$ 倍した点である。



[MEMO]

3 (1) $z=6-2i$ とする。点 z を原点を中心に次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(i) $\dfrac{\pi}{6}$　　(ii) $-\dfrac{\pi}{4}$　　(iii) $\dfrac{\pi}{2}$

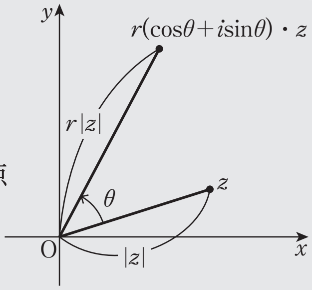
(2) 点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z をどのように移動した点か。

Point Pickup

複素数の積と回転

点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心に θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。

とくに $r=1$ のときは，原点を中心に θ だけ回転した点である。



第 6 講　PART3 確認問題

1　$z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数は [ア] である。

[ア] は下の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$　② $\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

③ $\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,i$　④ $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$

2　$z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は [イ] である。

[イ] は下の①～④のうちから選べ。

① $(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})i$　② $(1+2\sqrt{3})+(-2+\sqrt{3})i$

③ $(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$　④ $(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$

3　$z=4+2i$ とする。点 z を原点を中心に $\dfrac{3}{2}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は [ウ] である。

[ウ] は下の①～④のうちから選べ。

① $2-4i$　② $-2+4i$

③ $4-2i$　④ $-4-2i$

4 点 $(-3+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に [エ] だけ回転し，原点からの距離を [オ] 倍した点である。

[エ]，[オ] は下の①～④のうちから選べ。

[[エ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{2}{3}\pi$

③ $\dfrac{5}{6}\pi$　④ $\dfrac{7}{6}\pi$

[[オ] の選択肢]

① $\sqrt{3}$　② 3

③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{3}$

[MEMO]

第 7 講　ド・モアブルの定理

PART1 ド・モアブルの定理

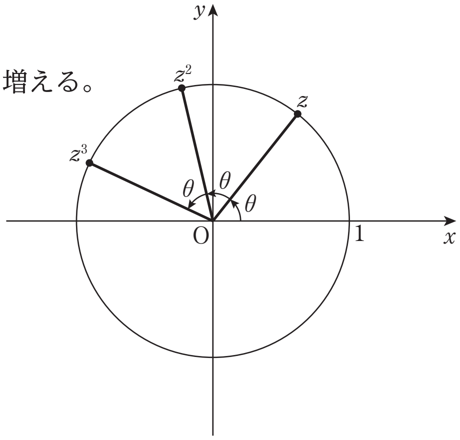
要点整理と公式

要点 ① ド・モアブルの定理

0 でない複素数に，絶対値が 1 の複素数

$z=\cos\theta+i\sin\theta$

をかけると，絶対値は変わらず，偏角が θ だけ増える。



このことを利用し，z の累乗を考える。

$$z^2=(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)$$
$$=\cos\qquad+i\sin$$

$$z^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=(\cos\qquad+i\sin\qquad)\times(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)$$
$$=\cos\qquad+i\sin$$

これを繰り返すと，正の整数 n について，以下が成り立つことがわかる。

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos\qquad+i\sin\qquad\cdots\cdots①$$

また，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ に対して

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\quad+i\sin}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos(0-\theta)+i\sin(0-\theta)$$
$$=\cos(\qquad)+i\sin(\qquad)$$

が成り立つから，正の整数 n について $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$ と定めると，①より

$$z^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}=\frac{1}{\cos\qquad+i\sin}$$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)$$

したがって，①は n が負の整数のときも成り立つ。

さらに，$z^0=1$ と定めると，次の「ド・モアブルの定理」が成り立つ。

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

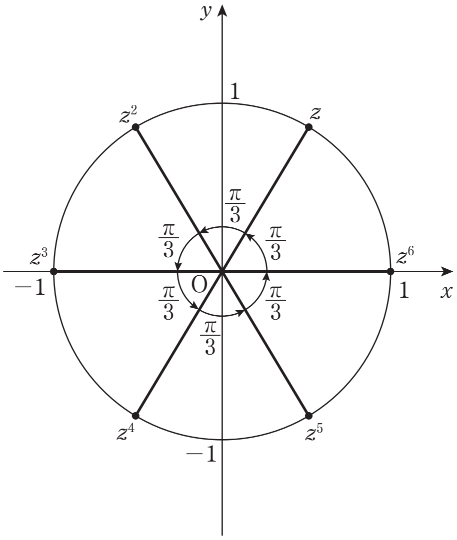
(ex) $z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ のとき

$$z^6 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$

$$= \cos\left(\quad\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\quad\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos 2\pi + i\sin 2\pi$$

$$= 1$$



1 次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$ (2) $(\sqrt{3}-i)^6$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}$ (4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9$

Point Pickup

ド・モアブルの定理

n が整数のとき

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

複素数の n 乗の計算は，複素数を極形式で表し，ド・モアブルの定理を利用することで偏角の n 倍の計算に持ち込むことができる。

第 7 講　PART1 確認問題

次の式を計算せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6=$ ア

① 0　② 1

③ -1　④ i

2 $(1-i)^5=$ イ

① $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$　② $4+4i$

③ $-4+4i$　④ $-4-4i$

3 $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^{-4}=$ ウ

① $-4-4\sqrt{3}\,i$　② $-8+8\sqrt{3}\,i$

③ $-8-8\sqrt{3}\,i$　④ $-8\sqrt{3}-8i$

4 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{12}=$ エ

① -32　② $32i$

③ 64　④ -64

PART2 1の n 乗根

要点整理と公式

要点① 1の n 乗根

1の3乗根，すなわち方程式 $x^3=1$ の解は

$$x^3-1=0 \qquad (x-1)(x^2+x+1)=0 \qquad x=1,\ \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

の3個である。

n を自然数とするとき，方程式 $z^n=1$ を満たす複素数 z を，1の「　　　　」という。

1の3乗根を，ド・モアブルの定理を用いて求める。

$z^3=1$ より $|z^3|=1$ 　　$|z|^3=1$ 　　$|z|>0$ より $|z|=1$

よって，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，ド・モアブルの定理より

$$z^3=\cos\ \ \ \theta+i\sin\ \ \ \theta$$

$z^3=1$ より $\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos 0+i\sin 0$

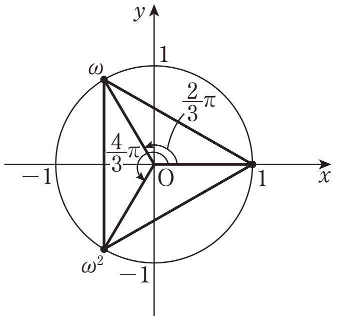
両辺の偏角を比較して $3\theta=0$ 　　　　　　(k は整数)

よって $\theta=\frac{2}{\ }\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では $k=0$，1，2 であるから，$\theta=0$，$\frac{2}{3}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$

したがって $z=1$，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

1の3乗根1，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ を複素数平面上に図示すると，右図のように，単位円に内接する正三角形の3つの頂点となっている。



一般に，1の n 乗根について，次のことが成り立つ。

> **1の n 乗根**
>
> 自然数 n に対して，1の n 乗根，すなわち $z^n=1$ の解は
>
> $$z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\times k\right) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)\ の\ n\ 個$$

[MEMO]

2 次の方程式を解け。

(1) $z^6=1$

(2) $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$

Point Pickup

方程式 $z^n=\alpha$ の解

方程式の解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) とおき，ド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

を用いて，$z^n=\alpha$ の左辺および右辺を極形式で表し，両辺の絶対値および偏角を比較する。

第 7 講　PART2 確認問題

1　方程式 $z^4=-1$ を解く。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$z^4=r^4\left(\cos\boxed{ア}\theta+i\sin\boxed{ア}\theta\right)$$

また，$-1=\cos\boxed{イ}+i\sin\boxed{イ}$

よって，$z^4=-1$ は次のように表される。

$$r^4\left(\cos\boxed{ア}\theta+i\sin\boxed{ア}\theta\right)=\cos\boxed{イ}+i\sin\boxed{イ}$$

この等式から r，θ を求めると，

$$r=\boxed{ウ},\quad \theta=\boxed{エ}$$

よって，$z^4=-1$ の解は，

$$z=\boxed{オ}\quad（複号任意）$$

$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$，$\boxed{オ}$ は，下の①～④のうちから選べ。

[$\boxed{イ}$ の選択肢]

① 0　② $\dfrac{\pi}{2}$　③ π　④ $\dfrac{3}{2}\pi$

[$\boxed{エ}$ の選択肢]

① $0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　② $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \pi$

③ $\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　④ $\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3}{8}\pi,\ \dfrac{5}{8}\pi,\ \dfrac{7}{8}\pi$

[$\boxed{オ}$ の選択肢]

① $\pm1\pm i$　② $\pm\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

③ $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$　④ $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i$

2 方程式 $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ を解く。

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと,

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

また, $-2+2\sqrt{3}\,i=\boxed{カ}\left(\cos\boxed{キ}+i\sin\boxed{キ}\right)$

よって, $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ は次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=\boxed{カ}\left(\cos\boxed{キ}+i\sin\boxed{キ}\right)$$

この等式から r, θ を求めると,

$$r=\boxed{ク},\quad \theta=\boxed{ケ}$$

よって, $z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$ の解は,

$$z=\boxed{コ}$$

$\boxed{キ}$, $\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ は, 下の①～④のうちから選べ。

[$\boxed{キ}$ の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$　　② $\dfrac{2}{3}\pi$　　③ $\dfrac{4}{3}\pi$　　④ $\dfrac{5}{3}\pi$

[$\boxed{ケ}$ の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2}{3}\pi$　　② $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4}{3}\pi$

③ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5}{6}\pi$　　④ $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7}{6}\pi$

[$\boxed{コ}$ の選択肢]

① $\pm(1+i)$　　② $\pm(\sqrt{3}+i)$

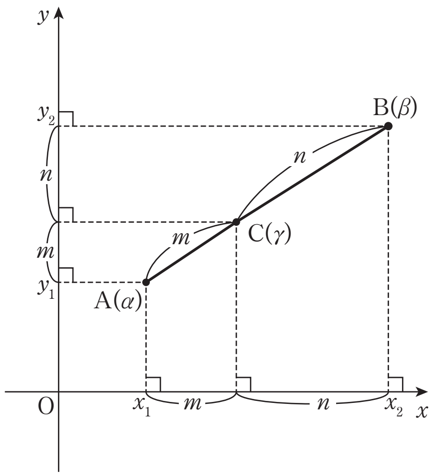
③ $\pm(1+\sqrt{3}\,i)$　　④ $\pm(1-\sqrt{3}\,i)$

[MEMO]

第 8 講　複素数と平面図形
PART1 内分点・外分点

要点整理と公式

要点① 線分の内分点・外分点



複素数平面上の 2 点 A(α)，B(β) について，線分 AB を $m : n$ に内分する点を C(γ) とする。

$\alpha = x_1 + y_1 i$，$\beta = x_2 + y_2 i$ とすると，点 γ の実部は $\dfrac{x_1+\quad x_2}{m+n}$，虚部は $\dfrac{y_1+\quad y_2}{m+n}$ である。

よって

$$\gamma = \frac{nx_1+mx_2}{m+n} + \frac{ny_1+my_2}{m+n}i$$
$$= \frac{n(x_1+y_1 i)+m(x_2+y_2 i)}{m+n}$$
$$= \frac{n\alpha+m\beta}{m+n}$$

が成り立つ。外分する点についても同様に考えることができる。

内分点・外分点

2 点 A(α)，B(β) に対して，線分 AB を $m : n$ に

内分する点は $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　外分する点は $\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

(ex) A($1+3i$)，B($5-2i$) とするとき，線分 AB を

1 : 2 に内分する点は $\dfrac{(1+3i)+\quad(5-2i)}{\quad+\quad} = \dfrac{7+4i}{3} =$

3 : 2 に外分する点は $\dfrac{(1+3i)+\quad(5-2i)}{\quad} = 13-12i$

[MEMO]

1 A$(3-2i)$，B$(4+5i)$，C$(-1+i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1) 線分 AB を 2：3 に内分する点

(2) 線分 AC を 3：1 に外分する点

(3) 線分 BC の中点

(4) △ABC の重心 G

Point Pickup

内分点・外分点

2 点 A(α)，B(β) について，線分 AB を $m:n$ に

内分する点は $\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$　　とくに，線分 AB の中点は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

外分する点は $\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

第 8 講　PART1 確認問題

A$(1+5i)$, B$(7+2i)$, C$(-5-i)$ とする。

次の点を表す複素数を求めよ。

1　線分 AB を 2：1 に内分する点

$\boxed{ア}+\boxed{イ}i$

2　線分 AC を 1：3 に外分する点

$\boxed{ウ}+\boxed{エ}i$

3　線分 BC の中点

$\boxed{オ}+\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}i$

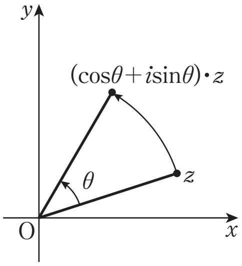
4　△ABC の重心

$\boxed{ク}+\boxed{ケ}i$

PART2 点を中心とする回転

要点整理と公式

要点① 点 α を中心とする回転



複素数平面上の点 z を，原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は

$$(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$$

である。これを元に，点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点 γ を表す複素数を考える。

点 α を　　　だけ平行移動すると，点 α は原点に移る。点 β と点 γ を，ともに　　　だけ平行移動した点をそれぞれ点 β'，点 γ' とすると，

$$\beta'=\beta \qquad ,\ \gamma'=\gamma$$

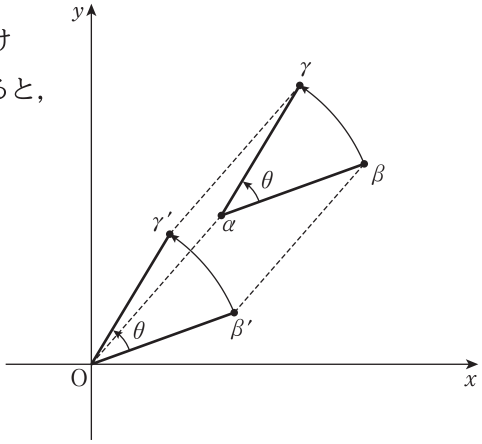
点 β' を，原点中心に θ だけ回転した点が γ' であるから

$$\gamma'=(\cos\theta+i\sin\theta)\beta'$$

したがって

$$\gamma \qquad =(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta \qquad)$$

である。



点 α を中心とする回転

点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

(ex) $\alpha=1-i$，$\beta=-1+3i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す複素数を γ とすると

$$\gamma \qquad =\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\beta \qquad)\ より$$

$$\gamma=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\{(-1+3i)-(1-i)\}+(1-i)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(-2+4i)+(1-i)$$

$$=-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i-\sqrt{2}\,i-2\sqrt{2}+1-i=1-3\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})i$$

[MEMO]

2 (1) $\alpha=1+i$，$\beta=3+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{5}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 複素数平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha=-2+i$，$\beta=4+3i$ とする。三角形 ABC が正三角形となるように点 C を定めるとき，点 C を表す複素数 γ を求めよ。

Point Pickup

点 α を中心とする回転

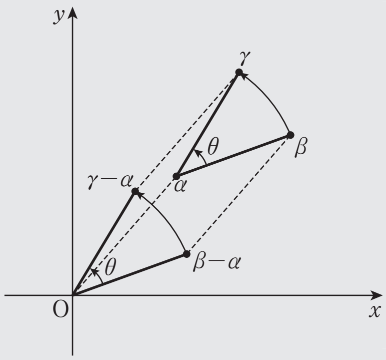
点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

すなわち

$$\gamma=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)+\alpha$$

である。



第 8 講 PART2 確認問題

1 $\alpha=2+i$，$\beta=4+5i$ とする。

点 β を，点 α を中心として $\frac{3}{4}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求める。

α，β，γ の間に等式 [ア] が成り立つ。

したがって，$\gamma=$ [イ] である。

[ア]，[イ] は，下の①～④のうちから選べ。

[[ア] の選択肢]

① $\gamma=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

② $\gamma-\alpha=\left(\sin\frac{3}{4}\pi+i\cos\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

③ $\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)$

④ $\gamma+\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta+\alpha)$

[[イ] の選択肢]

① $3\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$　　② $-3\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$

③ $(2+3\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})i$　　④ $(2-3\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i$

2 複素数平面上の2点A，Bを表す複素数をそれぞれ
$\alpha=-1+2i$，$\beta=3+4i$ とする。
三角形ABCが正三角形となるように点Cを定めるとき，
点Cを表す複素数 γ を求める。

このとき，点 γ は，点 β を，点 α を中心に [ウ] または
$-$[ウ] だけ回転した点である。
したがって，$\gamma=$ [エ] である。

[ウ]，[エ] は，下の①～④のうちから選べ。

[[ウ] の選択肢]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{3}$　③ $\dfrac{\pi}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}\pi$

[[エ] の選択肢]

① $\pm(2\sqrt{3}+\sqrt{3}i)$

② $2\sqrt{3}+\sqrt{3}i$，$(-2+2\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})i$

③ $(2-\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})i$，$(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i$

④ $(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i$，$(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i$

[MEMO]

PART3 半直線のなす角

要点整理と公式

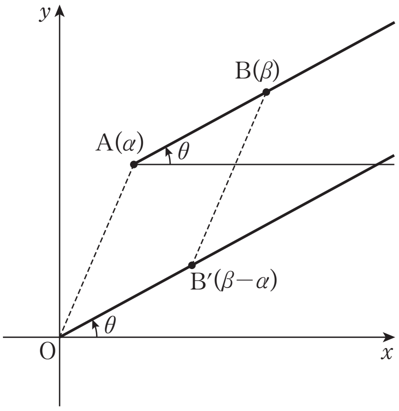
要点 ① 半直線が実軸となす角

複素数平面上の異なる 2 点 A(α)，B(β) について，半直線 AB が実軸の正の方向となす角を θ とする。この角 θ は，向きを含めて考える。

点 A を原点に移す平行移動によって，点 B は B′(　　) に移り，半直線 OB′ が実軸の正の方向となす角は θ であることから

$\theta=\arg(\qquad)$

である。



要点 ② 半直線のなす角

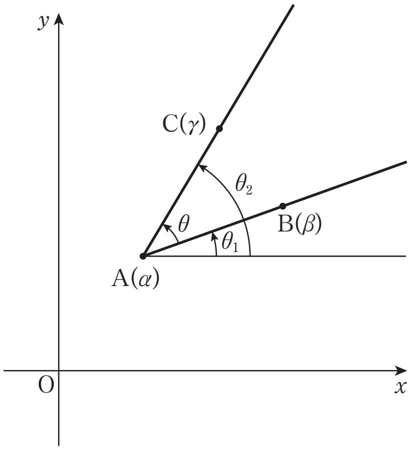
複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角を θ，AB，AC が実軸の正の方向となす角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする。角 θ，θ_1，θ_2 は，向きを含めて考える。

$\theta=\theta_2-\theta_1$

$=\arg(\qquad)-\arg(\qquad)$

$=\arg\dfrac{\qquad}{\qquad}$

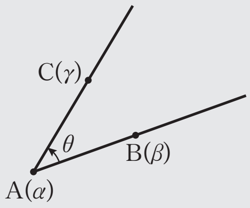
である。



半直線のなす角

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



(ex) A$(1+i)$，B$(4+2i)$，C$(3+5i)$ のとき，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ

$\alpha=1+i$，$\beta=4+2i$，$\gamma=3+5i$ とすると

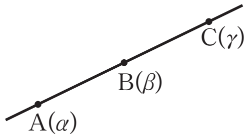
$$\underline{\qquad\quad}=\frac{(3+5i)-(1+i)}{(4+2i)-(1+i)}=\frac{2+4i}{3+i}=\frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$=\frac{10+10i}{10}=1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

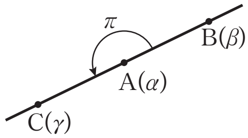
よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

要点 ③ 複素数平面上の 3 点の位置関係

複素数平面上の異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) において，$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とする。

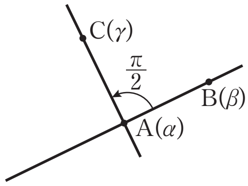


3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，$\theta=0$ または $\theta=\pi$ のときである。このとき



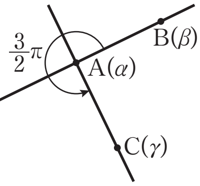
$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0 \text{ または } \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pi$$

より，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数である。



2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ または $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のときである。このとき

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\pi}{2} \text{ または } \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{2}\pi$$



より，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数である。

よって，次のことが成り立つ。

> 異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，
>
> 3 点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数
>
> 2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

3 (1) 複素数平面上の 3 点 A$(2+2i)$，B$(1+3i)$，C$(4+\sqrt{3}+i)$ について，∠BAC の大きさを求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 A$(3+i)$，B$(6-2i)$，C$(x+5i)$ について，次の条件を満たす実数 x の値をそれぞれ求めよ。

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にある。

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わる。

Point Pickup

半直線のなす角，3 点の位置関係

異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について

- $\angle \mathrm{BAC}=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$
- 3 点 A，B，C が一直線上にある $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数（$\angle \mathrm{BAC}=0$ または π）
- 2 直線 AB，AC が垂直に交わる $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数（$\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ または $\dfrac{3}{2}\pi$）

第 8 講　PART3 確認問題

1 複素数平面上に 3 点 A$(2+i)$，B$(5+2i)$，C$(-6+5i)$ があるとき，∠BAC の大きさを求める。

$\alpha=2+i$，$\beta=5+2i$，$\gamma=-6+5i$ とすると，

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}}\,i$$

であるから，∠BAC$=\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ は下の①～④のうちから選べ。

①　$\dfrac{\pi}{4}$　　②　$\dfrac{\pi}{3}$　　③　$\dfrac{2}{3}\pi$　　④　$\dfrac{3}{4}\pi$

2 複素数平面上の 3 点 A$(2i)$，B$(1+i)$，C$(x-3i)$ が一直線上にあるとき，$x=\boxed{\text{オ}}$ である。

3 複素数平面上の 3 点 A$(1-i)$，B$(3+2i)$，C$(x-3i)$ において，2 直線 AB，AC が垂直に交わるとき，$x=\boxed{\text{カ}}$ である。

PART4 方程式の表す図形

要点整理と公式

要点 ① 垂直二等分線

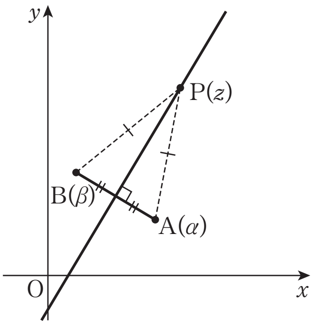
複素数平面上の2点 A(α)，B(β) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を P(z) とすると

$=$

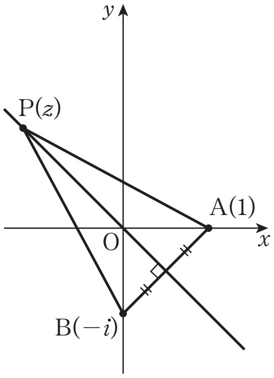
であるから，方程式

$|\quad|=|\quad|$

を満たす点 z は，線分 AB の垂直二等分線を描く。



(ex) 方程式 $|z-1|=|z+i|$ を満たす点 z は，2点 A(　)，B(　) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線を描く。



$z=x+yi$ (x，y は実数) とおくと

$|z-1|=|z+i|$

つまり　$|x-1+yi|=|x+(y+1)i|$ より

$\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2}$

$(x-1)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$　　よって $y=-x$

これは，原点を通る傾きが -1 の直線，すなわち2点 1，$-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を表す。

要点 ② 円

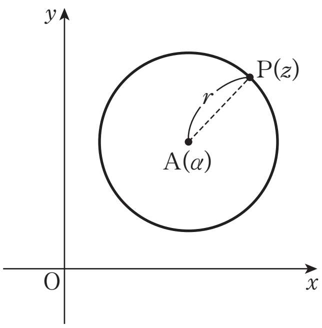
複素数平面上の点 A(α) を中心とする半径 r の円上の点を P(z) とすると

$=r$

であるから，方程式

$|\quad|=r$

を満たす点 z は，点 A を中心とする半径 r の円を描く。



(ex) 方程式 $|z-(2+i)|=2$ を満たす点 z は

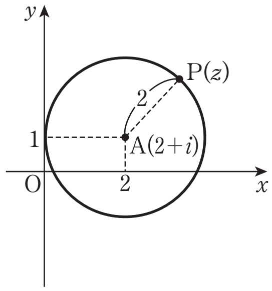
点 A(　　) を中心とする半径　の円を描く。

$z=x+yi$ (x, y は実数) とする。

$$|z-(2+i)|=2$$

つまり $|(x-2)+(y-1)i|=2$ より

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=2 \qquad (x-2)^2+(y-1)^2=2^2$$



これは，点 $2+i$ を中心とする半径 2 の円を表す。

4 次の方程式を満たす点 z は，どのような図形を描くか求めよ。

(1) $|z|=|z-3i|$

(2) $|z-2+4i|=\sqrt{2}$

(3) $(z+i)(\overline{z}-i)=9$

(4) $|z+1|=2|z-2|$

Point Pickup

方程式の表す図形

異なる 2 点 A(α)，B(β) について

方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点 z …… 線分 AB の垂直二等分線

方程式 $|z-\alpha|=r$ $(r>0)$ を満たす点 z …… 点 A を中心とする半径 r の円

また，$z=x+yi$ (x，y は実数) とおき，x，y の関係式を作ることで，z が描く図形の方程式を求める方法がある。

第 8 講 PART4 確認問題

1 方程式 $|z|=|z+2i|$ を満たす点 z は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 ア

① 2 点 0，$2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

② 2 点 0，$-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

③ 点 $-2i$ を中心とする半径 2 の円

④ 2 点 0，$2i$ を直径の両端とする円

2 方程式 $|z-3+2i|=4$ を満たす点 z は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 イ

① 点 $3-2i$ を中心とする半径 2 の円

② 点 $3-2i$ を中心とする半径 4 の円

③ 点 $-3+2i$ を中心とする半径 2 の円

④ 点 $-3+2i$ を中心とする半径 4 の円

3 方程式 $(z-3i)(\overline{z}+3i)=2$ を満たす点 z は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 ウ

① 2 点 $3i$，$-3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

② 点 $3i$ を中心とする半径 2 の円

③ 点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

④ 点 $-3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

4 方程式 $|z+2|=2|z-1|$ を満たす点 z は，どのような図形を描くかを求めよ。

答えは次の①～④のうちから答えよ。 エ

① 2点 -2，1 を結ぶ線分の垂直二等分線

② 原点を中心とする半径 2 の円

③ 点 2 を中心とする半径 2 の円

④ 点 2 を中心とする半径 4 の円

[MEMO]

第 1 講　いろいろな曲線

PART1 放物線

1　(1)　次の放物線の焦点と準線を求め，概形をかけ。

(i)　$y^2=8x$　　(ii)　$y^2=-6x$　　(iii)　$y=\frac{1}{2}x^2$

(2)　次の放物線の方程式を求めよ。

(i)　焦点が $(5,\ 0)$，準線が $x=-5$

(ii)　頂点が $(0,\ 0)$，準線が $y=1$

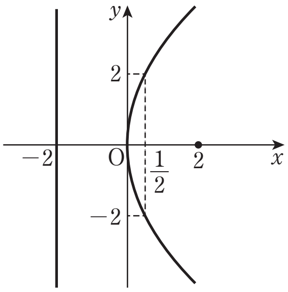
[解答]

(1)(i)　$y^2=4\cdot2x$ より焦点は $(2,\ 0)$　準線は $x=-2$　概形は 下図(ア)

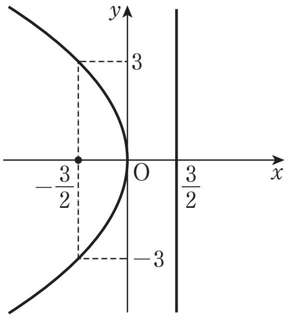
(ii)　$y^2=4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x$ より焦点は $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$　準線は $x=\frac{3}{2}$　概形は 下図(イ)

(iii)　$x^2=2y=4\cdot\frac{1}{2}y$ より焦点は $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$　準線は $y=-\frac{1}{2}$　概形は 下図(ウ)

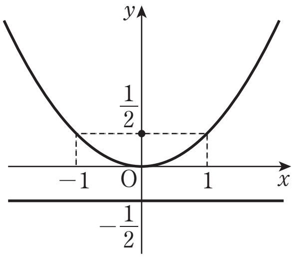
(ア)



(イ)



(ウ)



(2)(i)　$y^2=4\cdot5\cdot x$　すなわち $y^2=20x$

(ii)　$x^2=4\cdot(-1)\cdot y$　すなわち $x^2=-4y$

PART2 楕円

2 (1) 次の楕円の焦点，長軸の長さ，短軸の長さを求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$　(ii) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{36}=1$　(iii) $9x^2+25y^2=225$

(2) 次の楕円の方程式を求めよ。

(i) 2 点 (2，0)，(−2，0) からの距離の和が 8

(ii) 2 点 (0，5)，(0，−5) からの距離の和が 12

[解答]

(1)(i) $\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$ より，焦点は $(\sqrt{2},\ 0)$，$(-\sqrt{2},\ 0)$

$\dfrac{x^2}{(\sqrt{5})^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$　短軸の長さは $2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

概形は下図(ア)

(ii) $\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ より 焦点は $(0,\ 2\sqrt{5})$，$(0,\ -2\sqrt{5})$

$\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot6=12$　短軸の長さは $2\cdot4=8$

概形は下図(イ)

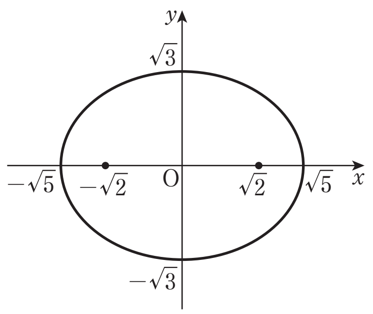
(iii) $9x^2+25y^2=225$ より $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

$\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ より，焦点は (4，0)，(−4，0)

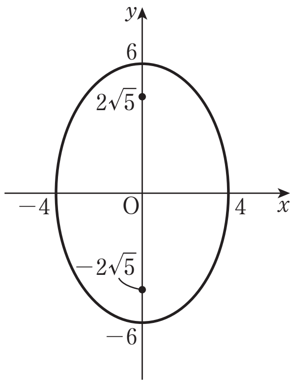
$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ より，長軸の長さは $2\cdot5=10$　短軸の長さは $2\cdot3=6$

概形は下図(ウ)

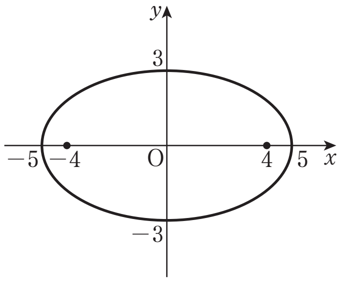
(ア)



(イ)



(ウ)



(2)(i)　焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ とおける。

焦点からの距離の和が 8 より，$2a=8$　　$a=4$

焦点の座標が $(2,\ 0)$ より，$\sqrt{a^2-b^2}=2$　　$16-b^2=4$　　$b^2=12$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

(ii)　焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ とおける。

焦点からの距離の和が 12 より，$2b=12$　　$b=6$

焦点の座標が $(0,\ 5)$ より，$\sqrt{b^2-a^2}=5$　　$36-a^2=25$　　$a^2=11$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{11}+\dfrac{y^2}{36}=1$

PART3 双曲線

3 (1) 次の双曲線の焦点，漸近線を求め，概形をかけ。

(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　　(ii) $2x^2-3y^2=-6$

(2) 次の双曲線の方程式を求めよ。

(i) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$ からの距離の差が $2\sqrt{5}$

(ii) 焦点が 2 点 $(0,\ 5)$，$(0,\ -5)$ で，漸近線が $y=\pm 2x$

[解答]

(1)(i) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ より $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1^2}=1$

$\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ より，焦点は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は $y=\dfrac{1}{2}x$，$y=-\dfrac{1}{2}x$

概形は下図(ア)

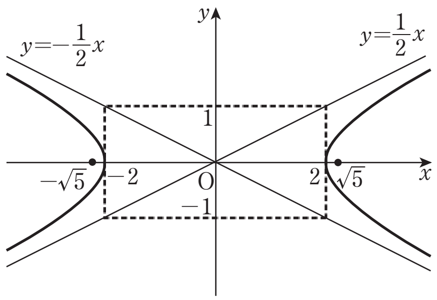
(ii) $2x^2-3y^2=-6$ より $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=-1$　　$\dfrac{x^2}{(\sqrt{3})^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=-1$

$\sqrt{3+2}=\sqrt{5}$ より 焦点は $(0,\ \sqrt{5})$，$(0,\ -\sqrt{5})$

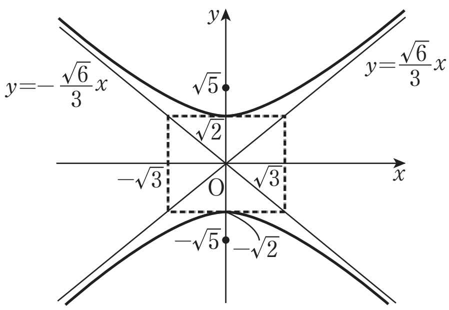
漸近線は $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$　つまり $y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$，$y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$

概形は下図(イ)

(ア)



(イ)



(2)(i)　焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$)とおける。

焦点からの距離の差が $2\sqrt{5}$ より，$2a=2\sqrt{5}$　　$a=\sqrt{5}$

焦点の座標が (3，0) より，$\sqrt{a^2+b^2}=3$　　$5+b^2=9$　　$b^2=4$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$

(ii)　焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ ($a>0$，$b>0$)とおける。

焦点の座標が (0，5) より，$\sqrt{a^2+b^2}=5$　　$a^2+b^2=25$　……①

漸近線が $y=2x$ より，$\dfrac{b}{a}=2$　　$b=2a$　……②

①，②より $a^2+4a^2=25$　　$a^2=5$

このとき①より　$5+b^2=25$　　$b^2=20$

よって，求める方程式は $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{20}=-1$

PART4　２次曲線の平行移動

4 (1)　次の２次曲線を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(i)　$y^2=2x$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(iii)　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)　次の方程式はどのような図形を表すか。

(i)　$y^2+x-4y+6=0$

(ii)　$9x^2-4y^2-18x-24y+9=0$

[解答]

(1)(i)　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}x$ より，移動前の放物線の焦点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

移動後の放物線の方程式は $(y+2)^2=2(x-3)$　　焦点の座標は $\left(\dfrac{7}{2},\ -2\right)$

(ii)　移動前の楕円の焦点の座標は

$(0,\ \sqrt{9-5})$，$(0,\ -\sqrt{9-5})$　すなわち $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

移動後の楕円の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

焦点の座標は　$(3,\ 0)$，$(3,\ -4)$

(iii)　移動前の双曲線の焦点の座標は

$(\sqrt{4+1},\ 0)$，$(-\sqrt{4+1},\ 0)$　すなわち　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

移動後の双曲線の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{4}-(y+2)^2=1$

焦点の座標は $(\sqrt{5}+3,\ -2)$，$(-\sqrt{5}+3,\ -2)$

(2)(i)　$(y-2)^2-4+x+6=0$

$(y-2)^2=-x-2$

$(y-2)^2=-(x+2)$

よって，放物線 $y^2=-x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線を表す。

(ii)　$9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+6y\right)+9=0$

$9\left\{(x-1)^2-1\right\}-4\left\{(y+3)^2-9\right\}+9=0$

$9(x-1)^2-4(y+3)^2=-36$

$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+3)^2}{9}=-1$

よって，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した双曲線を表す。

第 2 講　2次曲線と直線

PART1　2次曲線と直線の共有点

1　(1)　次の曲線と直線の共有点の座標を求めよ。

(i)　$y^2=6x$，$x-2y+6=0$

(ii)　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=-1$，$3x-2y-2=0$

(2)　k を定数とする。楕円 $2x^2+y^2=4$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}x+k$ の共有点の個数を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\begin{cases} y^2=6x & \cdots\cdots① \\ x-2y+6=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②より $x=2y-6$

これを①に代入して

$y^2=6(2y-6)$

$y^2-12y+36=0$

$(y-6)^2=0$　　　$y=6$

このとき②より $x=6$

よって，共有点の座標は $(6,\ 6)$

(ii)　$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-y^2=-1 & \cdots\cdots① \\ 3x-2y-2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$x^2-4y^2=-4$　$\cdots\cdots①'$

②より　$2y=3x-2$　$\cdots\cdots②'$

②′ を ①′ に代入して

$x^2-(3x-2)^2=-4$

$2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$　　　$x=0,\ \dfrac{3}{2}$

②′ より $x=0$ のとき $y=-1$　　　$x=\dfrac{3}{2}$ のとき $y=\dfrac{5}{4}$

よって，共有点の座標は $(0,\ -1)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$

(2) $\begin{cases} 2x^2+y^2=4 & \cdots\cdots① \\ y=\dfrac{1}{2}x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$

②を①に代入して

$$2x^2+\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=4$$

$$9x^2+4kx+4k^2-16=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-9(4k^2-16)=-32k^2+144$$

$D>0$ のとき，$-32k^2+144>0$　　$k^2<\dfrac{9}{2}$　　$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

したがって共有点の個数は

$D>0$ すなわち $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 2 個

$D=0$ すなわち $k=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 1 個

$D<0$ すなわち $k<-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<k$ のとき 0 個

PART2　２次曲線の接線

2　(1)　次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(i)　$y^2=8x$　$(2,\ -4)$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$　$(\sqrt{3},\ \sqrt{2})$

(iii)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(2,\ 2\sqrt{3})$　　(iv)　$x^2-2y^2=-2$　$(-4,\ 3)$

(2)　点 $(0,\ 2)$ から楕円 $2x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[解答]

(1)(i)　求める接線の方程式は

$$-4y=4(x+2)\qquad よって\ y=-x-2$$

(ii)　求める接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{6}+\frac{\sqrt{2}\,y}{4}=1\qquad よって\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+2\sqrt{2}$$

(iii)　求める接線の方程式は

$$2x-\frac{2\sqrt{3}\,y}{4}=1\qquad よって\ y=\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(iv)　$\dfrac{x^2}{2}-y^2=-1$ より，求める接線の方程式は

$$\frac{-4x}{2}-3y=-1\qquad よって\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\left(-4x-2\cdot3y=-2\ より\ -4x-6y=-2\qquad よって\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)$$

(2)(解法 1)

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$$2x_1x+y_1y=2\quad\cdots\cdots①$$

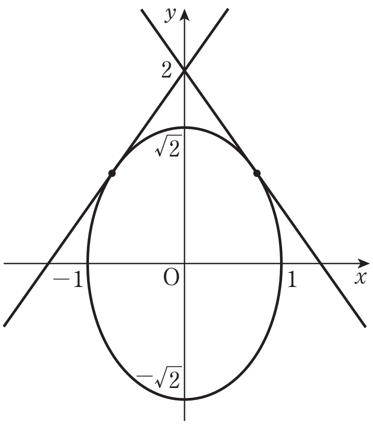
これが点 $(0,\ 2)$ を通るので，$2y_1=2$

よって　$y_1=1$　……②

また，接点は楕円上にあるので

$$2x_1{}^2+y_1{}^2=2\quad\cdots\cdots③$$

②を③に代入して



$2{x_1}^2+1=2$　　$x_1{}^2=\dfrac{1}{2}$　　$x_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=1$ のとき，①より $\sqrt{2}\,x+y=2$　　よって $y=-\sqrt{2}\,x+2$

$x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=1$ のとき，①より $-\sqrt{2}\,x+y=2$　　よって $y=\sqrt{2}\,x+2$

したがって，求める接線の方程式は $y=\sqrt{2}\,x+2$，$y=-\sqrt{2}\,x+2$

(解法 2)

点 $(0,\ 2)$ を通る接線は x 軸に垂直ではないので，その方程式は

$y=mx+2$　……①

とおくことができる。これを楕円の方程式 $2x^2+y^2=2$ に代入すると

$2x^2+(mx+2)^2=2$

$(m^2+2)x^2+4mx+2=0$

この方程式の判別式を D とすると，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+2)\cdot 2=2m^2-4$ より　$2m^2-4=0$　　$m=\pm\sqrt{2}$

このとき①より，求める接線の方程式は $y=\sqrt{2}\,x+2$，$y=-\sqrt{2}\,x+2$

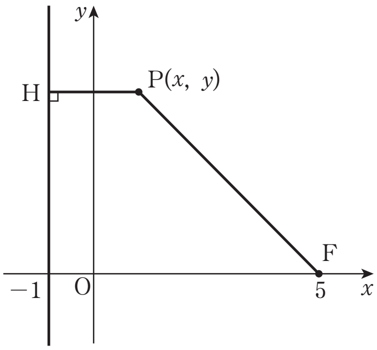
第 3 講　2次曲線と離心率，媒介変数表示

PART1　2次曲線と離心率

1　点 F$(5,\ 0)$ からの距離と，直線 $x=-1$ からの距離の比が次のような点 P の軌跡を求めよ。

(1)　1：1　　(2)　1：2　　(3)　2：1

[解答]



$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$\mathrm{PF}^2=(x-5)^2+y^2$，$\mathrm{PH}^2=(x+1)^2$

(1)　PF：PH＝1：1　より　PH＝PF

つまり　$\mathrm{PH}^2=\mathrm{PF}^2$

よって $(x+1)^2=(x-5)^2+y^2$

$$x^2+2x+1=x^2-10x+25+y^2$$

$$y^2=12(x-2)$$

したがって，点 P の軌跡は　放物線　$y^2=12(x-2)$

(2)　PF：PH＝1：2　より　PH＝2PF　つまり　$\mathrm{PH}^2=4\mathrm{PF}^2$

よって $(x+1)^2=4\{(x-5)^2+y^2\}$

$$x^2+2x+1=4x^2-40x+100+4y^2$$

$$\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$$

したがって，点 P の軌跡は　楕円　$\dfrac{(x-7)^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$

(3)　PF：PH＝2：1　より　2PH＝PF　つまり　$4\mathrm{PH}^2=\mathrm{PF}^2$

よって $4(x+1)^2=(x-5)^2+y^2$

$$4x^2+8x+4=x^2-10x+25+y^2$$

$$\frac{(x+3)^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$$

したがって，点 P の軌跡は　双曲線　$\dfrac{(x+3)^2}{16}-\dfrac{y^2}{48}=1$

PART2 2次曲線の媒介変数表示

2 (1) 次の媒介変数表示は，どのような曲線を表すか。

(i) $x=t-1$，$y=t^2-2$ (ii) $x=t+2$，$y=\sqrt{t}$

(iii) $x=4\cos\theta$，$y=2\sin\theta+3$ (iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$

(2) 角 θ を媒介変数として，次の曲線の媒介変数表示を求めよ。

(i) $x^2+y^2=25$ (ii) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (iii) $\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$

[解答]

(1)(i) $x=t-1$ より $t=x+1$

これを $y=t^2-2$ に代入すると $y=(x+1)^2-2$

よって 放物線 $y=x^2+2x-1$

(ii) $y=\sqrt{t}$ より $y^2=t$

これを $x=t+2$ に代入すると $x=y^2+2$

また，$y=\sqrt{t}\geqq 0$ よって 放物線 $y^2=x-2$ の $y\geqq 0$ の部分

(iii) $x=4\cos\theta$，$y=2\sin\theta+3$ より $\cos\theta=\dfrac{x}{4}$，$\sin\theta=\dfrac{y-3}{2}$

これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2+\left(\dfrac{y-3}{2}\right)^2=1$

よって 楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

(iv) $x=\dfrac{2}{\cos\theta}$，$y=3\tan\theta$ より $\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{x}{2}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{3}$

これを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して $1+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

よって 双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$

(2)(i) $x=5\cos\theta$，$y=5\sin\theta$

(ii) $x=6\cos\theta$，$y=4\sin\theta$

(iii) $x+2=2\cos\theta$，$y-3=3\sin\theta$ より $x=2\cos\theta-2$，$y=3\sin\theta+3$

第 4 講　極座標と極方程式

PART1 極座標と直交座標

1 (1)　極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(i) $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$　　(ii) $(2,\ \pi)$　　(iii) $\left(3,\ -\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2)　直交座標が次のような点の極座標 $(r,\ \theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を求めよ。

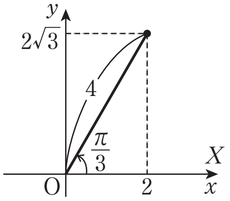
(i) $(-1,\ -1)$　　(ii) $(0,\ -3)$　　(iii) $(\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$

[解答]

(1)(i)　$x = 4\cos\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$

$y = 4\sin\dfrac{\pi}{3} = 4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

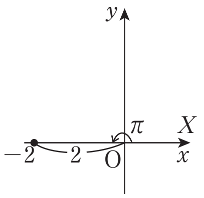
よって　$(2,\ 2\sqrt{3})$



(ii)　$x = 2\cos\pi = 2\cdot(-1) = -2$

$y = 2\sin\pi = 2\cdot 0 = 0$

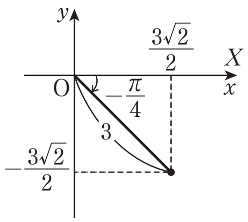
よって　$(-2,\ 0)$



(iii)　$x = 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$y = 3\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 3\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

よって　$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

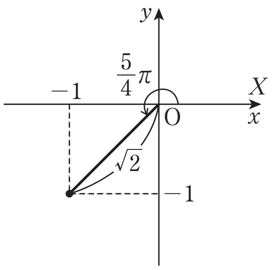


(2)(i)　$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

よって　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これを満たす $\theta\,(0 \leqq \theta < 2\pi)$ は　$\theta = \dfrac{5}{4}\pi$

したがって $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$

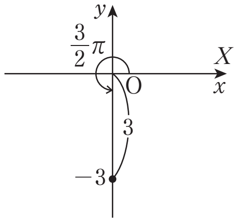


(ii)　$r=\sqrt{0^2+(-3)^2}=\sqrt{9}=3$

よって　$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$，$\sin\theta=\dfrac{-3}{3}=-1$

これを満たす $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ は　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

したがって $\left(3,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$

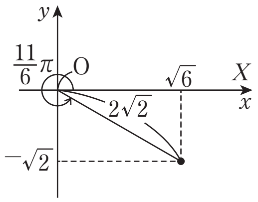


(iii)　$r=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$

これを満たす $\theta(0\leqq\theta<2\pi)$ は　$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$

したがって $\left(2\sqrt{2},\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$



PART2 極方程式

2 (1) 極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ である点Aを通り，直線OAに垂直な直線 ℓ の極方程式を求めよ。

(2) 次の極方程式は，どのような図形を表すか。

(i) $r=4$　　(ii) $\theta=\frac{\pi}{6}$

(iii) $r=5\cos\theta$　　(iv) $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=3$

(3)(i) 極方程式 $r=\sin\theta$ を直交座標の $x,\ y$ の方程式で表せ。

(ii) 楕円 $x^2+5y^2=1$ を極方程式で表せ。

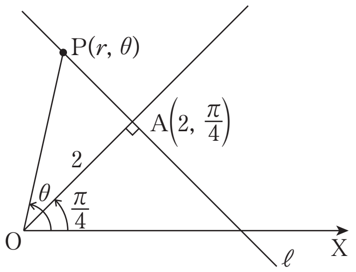
[解答]

(1) 直線 ℓ 上の点Pの極座標を $(r,\ \theta)$ とすると

$$\mathrm{OP}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{OA}$$

よって，求める極方程式は

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$$



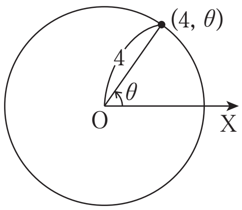
(2)(i) 中心が極O，半径が4の円

(ii) 極Oを通り，始線OXと $\frac{\pi}{6}$ の角をなす直線

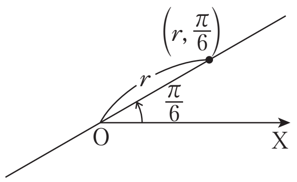
(iii) 中心が $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，半径が $\frac{5}{2}$ の円

(iv) 極座標が $\left(3,\ \frac{\pi}{3}\right)$ である点Aを通り，線分OAに垂直な直線

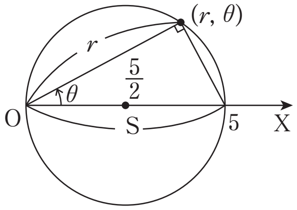
(i)



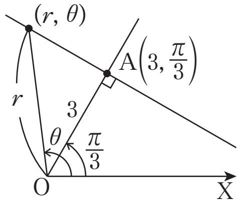
(ii)



(iii)



(iv)



(3)(i)　$r=\sin\theta$ より　$r^2=r\sin\theta$

曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$とすると，$r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$ より

$x^2+y^2=y$　　　よって　$x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

(ii)　曲線上の点 $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より

$(r\cos\theta)^2+5(r\sin\theta)^2=1$

$r^2\left(\cos^2\theta+5\sin^2\theta\right)=1$　　　よって $r^2\left(1+4\sin^2\theta\right)=1$

第 5 講　複素数平面

PART1 複素数平面

1　(1)　$\alpha=3-i$，$\beta=x+3i$ とする。3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，実数 x の値を求めよ。

(2)　$\alpha=2+3i$，$\beta=-2+i$ であるとき，次の複素数を表す点を図示せよ。

(i)　$\alpha+\beta$　　(ii)　$\alpha-\beta$　　(iii)　$\alpha+2\beta$

[解答]

(1)　3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta=k\alpha$ となる実数 k が存在する。

$x+3i=k(3-i)$ より　$x+3i=3k-ki$

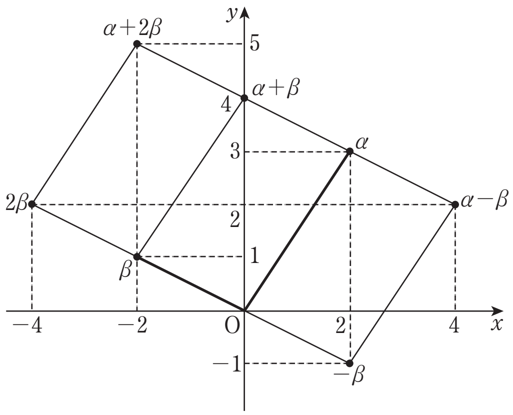
よって　$x=3k$，$3=-k$

したがって　$k=-3$，$x=-9$

(2)(i)　$\alpha+\beta=(2+3i)+(-2+i)=4i$

(ii)　$\alpha-\beta=(2+3i)-(-2+i)=4+2i$

(iii)　$\alpha+2\beta=(2+3i)+2(-2+i)=-2+5i$



PART2 共役複素数の性質

2 (1) 複素数 z が $2z+\overline{z}=4+i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(i) $2\overline{z}+z$ を求めよ。　　(ii) z を求めよ。

(2) 点 $-2+3i$ と実軸，原点，虚軸に関して対称な点を表す複素数を求めよ。

[解答]

(1)(i) $2z+\overline{z}=4+i$ の両辺の共役複素数を考えると

$\overline{2z+\overline{z}}=\overline{4+i}$　　よって　$2\overline{z}+z=4-i$

(ii) $2z+\overline{z}=4+i$ ……①　　$z+2\overline{z}=4-i$ ……②

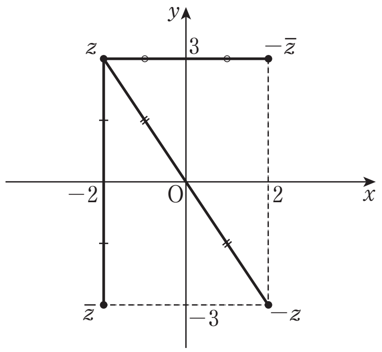
①×2−②より　$3z=4+3i$　　よって $z=\dfrac{4+3i}{3}=\dfrac{4}{3}+i$

(2) $z=-2+3i$ とおくと

実軸に関して対称な点を表す複素数は $\overline{z}=-2-3i$

原点に関して対称な点を表す複素数は $-z=2-3i$

虚軸に関して対称な点を表す複素数は $-\overline{z}=2+3i$



PART3 複素数の絶対値の性質

3 (1) 次の複素数の絶対値を求めよ。

(i) $4+3i$　　(ii) $-3+i$　　(iii) $-4i$

(2) 次の 2 点間の距離を求めよ。

(i) $\mathrm{A}(5+6i)$, $\mathrm{B}(-7+i)$　　(ii) $\mathrm{C}(-2)$, $\mathrm{D}(-4i)$

[解答]

(1)(i) $|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

(ii) $|-3+i|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

(iii) $|-4i|=\sqrt{(-4)^2}=4$

(2)(i) $\mathrm{AB}=|(-7+i)-(5+6i)|=|-12-5i|=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}=\sqrt{169}=13$

(ii) $\mathrm{CD}=|(-4i)-(-2)|=|2-4i|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

第 6 講　複素数の極形式，乗法・除法

PART1 複素数の極形式

1 次の複素数を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $-1+i$　(2) $\sqrt{3}-3i$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$　(4) $3i$

[解答]

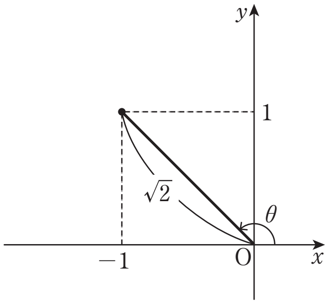
与えられた複素数の絶対値を r，偏角を θ とする。

(1) $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$

よって，$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

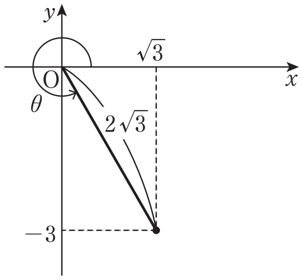


(2) $r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

よって，$\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$



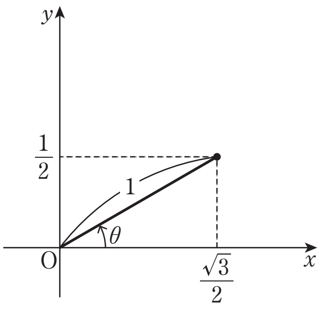
(3) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

$r=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=1$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

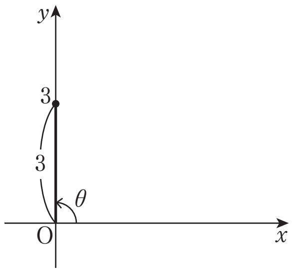


(4)　$r=\sqrt{0^2+3^2}=3$

$\cos\theta=\dfrac{0}{3}=0$，$\sin\theta=\dfrac{3}{3}=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

よって，$3i=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$



PART2 積・商の極形式

2 次の 2 つの複素数 α，β について，$\alpha\beta$，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ をそれぞれ極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1)　$\alpha=1-\sqrt{3}\,i$，$\beta=\sqrt{3}+i$　　(2)　$\alpha=-2+2i$，$\beta=-\sqrt{3}-3i$

[解答]

(1)　$\alpha=1-\sqrt{3}\,i=2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

$\beta=\sqrt{3}+i=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

よって

$\alpha\beta=2\cdot2\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=4\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5}{3}\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　$\alpha=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi+i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$

$\beta=-\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

よって

$\alpha\beta=2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\}=4\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{25}{12}\pi+i\sin\dfrac{25}{12}\pi\right)$

$=4\sqrt{6}\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\left\{\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{4}{3}\pi\right)\right\}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left\{\cos\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{7}{12}\pi\right)\right\}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi\right)$

PART3 複素数の積の図形的な意味

3 (1) $z=6-2i$ とする。点 z を原点を中心に次の角だけ回転した点を表す複素数を求めよ。

(i) $\dfrac{\pi}{6}$　　(ii) $-\dfrac{\pi}{4}$　　(iii) $\dfrac{\pi}{2}$

(2) 点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z をどのように移動した点か。

[解答]

(1)(i) $\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(6-2i)=(1+3\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})i$

(ii) $\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}z=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)(6-2i)$

$=(3\sqrt{2}-\sqrt{2})+(-3\sqrt{2}-\sqrt{2})i=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$

(iii) $\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)z=i(6-2i)=2+6i$

(2) $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z=2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z=2\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}z$

よって，点 $(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に $-\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{2}$ 倍した点である。

第 7 講　ド・モアブルの定理

PART1　ド・モアブルの定理

1　次の式を計算せよ。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3$　　(2) $(\sqrt{3}-i)^6$

(3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}$　　(4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9$

[解答]

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^3=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(2) $\sqrt{3}-i=2\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ より

$$(\sqrt{3}-i)^6=2^6\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6=2^6\{\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)\}=2^6\cdot(-1)=-64$$

(3) $\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{4}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ より

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-4}$$

$$=2^4\left\{\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)\right\}=16\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-8+8\sqrt{3}\,i$$

(4) $$\frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\pi\right)\right\}=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}$$

より

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^9=(\sqrt{2})^9\left\{\cos\left(-\frac{5}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi\right)\right\}^9$$

$$=(\sqrt{2})^9\left\{\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)\right\}$$

$$=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=16+16i$$

PART2 1 の n 乗根

2 次の方程式を解け。

(1) $z^6=1$　　(2) $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$

[解答]

(1) 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) ……① とおくと,

$$z^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$$

また $1=\cos 0+i\sin 0$

よって，方程式 $z^6=1$ は極形式を用いて次のように表される。

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=\cos 0+i\sin 0$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r^6=1,\ 6\theta=0+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$

$$r>0\text{ より } r=1,\ \theta=\frac{\pi}{3}\times k$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $k=0$, 1, 2, 3, 4, 5 であるから，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

①より，求める解は $1,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -1,\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\left(\pm 1,\ \pm\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\ (\text{複号任意})\right)$$

(2) 解を $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$, $0\leqq\theta<2\pi$) ……① とおくと,

$$z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)$$

また $-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$

よって，方程式 $z^4=-2-2\sqrt{3}\,i$ は極形式を用いて次のように表される。

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=4\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較して

$$r^4=4,\ 4\theta=\frac{4}{3}\pi+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$

$$r>0\text{ より } r=\sqrt{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\times k$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より $k=0$, 1, 2, 3 であるから，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{5}{6}\pi$, $\dfrac{4}{3}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$

①より，求める解は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$, $\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$$\left(\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right),\ \pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$$

第 8 講　複素数と平面図形

PART1 内分点・外分点

1　A$(3-2i)$, B$(4+5i)$, C$(-1+i)$ とする。次の点を表す複素数を求めよ。

(1)　線分 AB を 2：3 に内分する点

(2)　線分 AC を 3：1 に外分する点

(3)　線分 BC の中点

(4)　△ABC の重心 G

[解答]

(1)　$\dfrac{3(3-2i)+2(4+5i)}{2+3}=\dfrac{17+4i}{5}=\dfrac{17}{5}+\dfrac{4}{5}i$

(2)　$\dfrac{-(3-2i)+3(-1+i)}{3-1}=\dfrac{-6+5i}{2}=-3+\dfrac{5}{2}i$

(3)　$\dfrac{(4+5i)+(-1+i)}{2}=\dfrac{3+6i}{2}=\dfrac{3}{2}+3i$

(4)　$\dfrac{(3-2i)+(4+5i)+(-1+i)}{3}=\dfrac{6+4i}{3}=2+\dfrac{4}{3}i$

PART2 点を中心とする回転

2 (1) $\alpha=1+i$，$\beta=3+5i$ とする。点 β を，点 α を中心として $\dfrac{5}{6}\pi$ だけ回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 複素数平面上の 2 点 A，B を表す複素数をそれぞれ $\alpha=-2+i$，$\beta=4+3i$ とする。三角形 ABC が正三角形となるように点 C を定めるとき，点 C を表す複素数 γ を求めよ。

[解答]

(1) $\gamma-\alpha=\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)(\beta-\alpha)$ より

$$\gamma=\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\{(3+5i)-(1+i)\}+(1+i)$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2+4i)+(1+i)$$

$$=-\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,i+i-2+1+i=(-1-\sqrt{3})+(2-2\sqrt{3})i$$

(2) 点 γ は点 β を，点 α を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点であるから

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

または $\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots②$

$\beta-\alpha=(4+3i)-(-2+i)=6+2i$ より

①のとき　$\gamma=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6+2i)+(-2+i)=(1-\sqrt{3})+(2+3\sqrt{3})i$

②のとき　$\gamma=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(6+2i)+(-2+i)=(1+\sqrt{3})+(2-3\sqrt{3})i$

よって $\gamma=(1-\sqrt{3})+(2+3\sqrt{3})i$，$(1+\sqrt{3})+(2-3\sqrt{3})i$

PART3 半直線のなす角

3 (1) 複素数平面上の 3 点 $A(2+2i)$，$B(1+3i)$，$C(4+\sqrt{3}+i)$ について，$\angle BAC$ の大きさを求めよ。

(2) 複素数平面上の 3 点 $A(3+i)$，$B(6-2i)$，$C(x+5i)$ について，次の条件を満たす実数 x の値をそれぞれ求めよ。

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にある。

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わる。

[解答]

(1) $\alpha=2+2i$，$\beta=1+3i$，$\gamma=4+\sqrt{3}+i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(4+\sqrt{3}+i)-(2+2i)}{(1+3i)-(2+2i)}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})-i}{-1+i}=\frac{\{(2+\sqrt{3})-i\}(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-\frac{(3+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2}$$

$$=(1+\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=(1+\sqrt{3})\left\{\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

よって，$\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{5}{6}\pi$ より $\angle BAC=\dfrac{5}{6}\pi$

(2) $\alpha=3+i$，$\beta=6-2i$，$\gamma=x+5i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x+5i)-(3+i)}{(6-2i)-(3+i)}=\frac{x-3+4i}{3-3i}=\frac{(x-3+4i)(3+3i)}{(3-3i)(3+3i)}$$

$$=\frac{(3x-21)+(3x+3)i}{18}=\frac{(x-7)+(x+1)i}{6}$$

(i) 3 点 A，B，C が一直線上にあるのは $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときであるから

$x+1=0$ よって $x=-1$

(ii) 2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから

$x-7=0$ かつ $x+1\neq 0$　　よって $x=7$

PART4 方程式の表す図形

4 次の方程式を満たす点 z は，どのような図形を描くか求めよ。

(1) $|z|=|z-3i|$　　(2) $|z-2+4i|=\sqrt{2}$

(3) $(z+i)(\overline{z}-i)=9$　　(4) $|z+1|=2|z-2|$

[解答]

(1) 2 点 0，$3i$ を結ぶ線分の垂直二等分線

(2) $|z-(2-4i)|=\sqrt{2}$ より，点 $2-4i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円

(3) $z=x+yi$ (x，y は実数)とおくと

$(z+i)(\overline{z}-i)=9$ より $\{x+(y+1)i\}\{x-(y+1)i\}=9$　　$x^2+(y+1)^2=9$

よって 点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(別解) $(z+i)(\overline{z}-i)=9$ より $(z+i)(\overline{z+i})=9$ つまり $|z+i|^2=9$

よって $|z+i|=3$ より 点 $-i$ を中心とする半径 3 の円

(4) $z=x+yi$ (x，y は実数)とおくと

$$|x+1+yi|=2|(x-2)+yi|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

$$(x+1)^2+y^2=4\{(x-2)^2+y^2\} \qquad x^2-6x+y^2+5=0$$

よって $(x-3)^2+y^2=4$ より 点 3 を中心とする半径 2 の円

(別解) $|z+1|=2|z-2|$ より $|z+1|^2=4|z-2|^2$

$$(z+1)(\overline{z+1})=4(z-2)(\overline{z-2}) \qquad (z+1)(\overline{z}+1)=4(z-2)(\overline{z}-2)$$

$$z\overline{z}-3z-3\overline{z}+5=0$$

$$(z-3)(\overline{z}-3)=4 \qquad (z-3)(\overline{z-3})=4 \qquad |z-3|^2=4$$

よって $|z-3|=2$ より 点 3 を中心とする半径 2 の円

第 1 講 PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：②

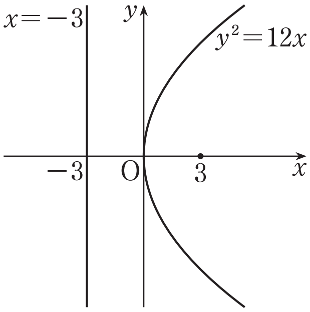
[解説]

$$y^2 = 12x$$

$$y^2 = 4 \cdot 3x$$ [A]

よって，焦点は，$(3,\ 0)$

準線は，$x=-3$



[A]　放物線 $y^2 = 4px$ の
焦点は $(p,\ 0)$，準線は $x=-p$

2 **[正解]** ウ：③，エ：①

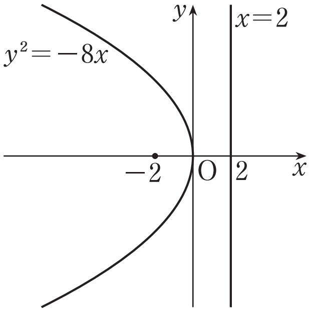
[解説]

$$y^2 = -8x$$

$$y^2 = 4 \cdot (-2)x$$ [B]

よって，焦点は，$(-2,\ 0)$

準線は，$x=2$



[B]　放物線 $y^2 = 4px$ の
焦点は $(p,\ 0)$，準線は $x=-p$

3 [正解] オ：①，カ：③

[解説]

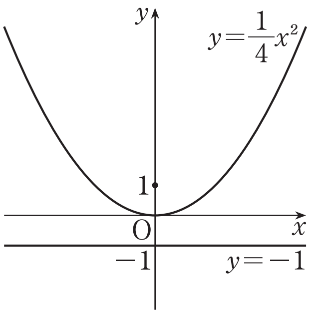
$y=\frac{1}{4}x^2$ より，

$$x^2=4y$$

$$x^2=4\cdot1\cdot y$$ [C]

よって，焦点は，$(0,\ 1)$

準線は，$y=-1$



[C]　放物線 $x^2=4py$ の焦点は $(0,\ p)$，準線は $y=-p$

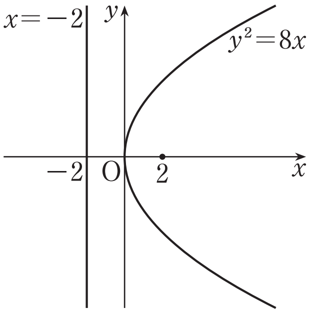
4 [正解] キ：②

[解説]

焦点が $(2,\ 0)$，準線が $x=-2$ である放物線の方程式は，

$$y^2=4\cdot2x$$ [D]

すなわち，$y^2=8x$



[D]　焦点が $(p,\ 0)$，準線が $x=-p$ である放物線の方程式は，

$$y^2=4px$$

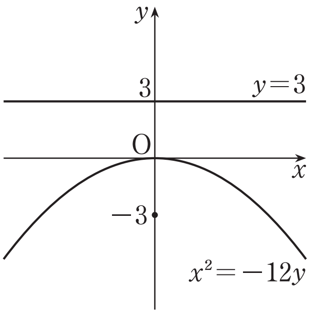
5　**[正解] ク：③**

[解説]

頂点が (0, 0)，準線が $y=3$ である放物線の焦点は (0, −3) であるから，放物線の方程式は，

$$x^2=4\cdot(-3)y$$ [E]

すなわち，$\boldsymbol{x^2=-12y}$



[E]　焦点が (0, p)，準線が $y=-p$ である放物線の方程式は，

$$x^2=4py$$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：③

[解説]

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

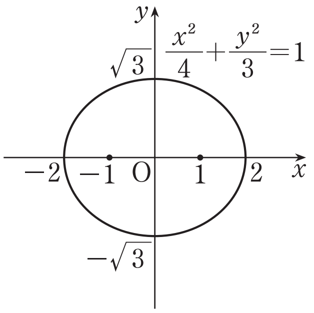
$\sqrt{4-3}=1$ より，焦点は，[A]

$$(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$$

方程式は，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot 2=4$ [A]

短軸の長さは，$2\cdot\sqrt{3}=\mathbf{2\sqrt{3}}$

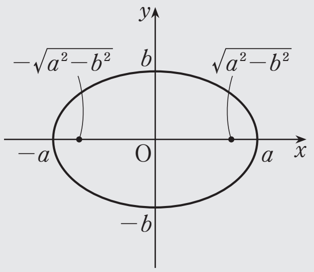


[A]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ において，

焦点：$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ (-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

長軸の長さ：$2a$

短軸の長さ：$2b$



2　**[正解]** ウ：④，エ：②

[解説]

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

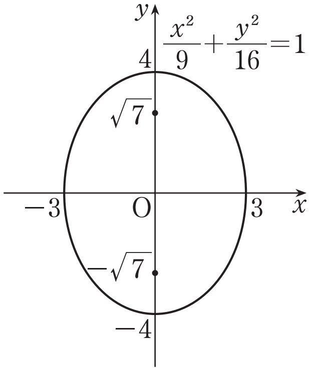
$\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ より，焦点は，[B]

$$(0,\ \sqrt{7}),\ (0,\ -\sqrt{7})$$

方程式は，$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot4=8$ [B]

短軸の長さは，$2\cdot3=6$



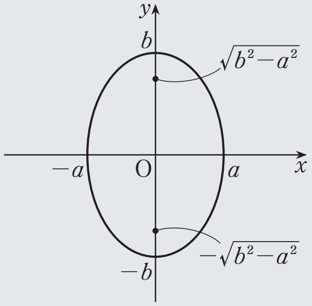
[B]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$

において，

焦点：$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

長軸の長さ：$2b$

短軸の長さ：$2a$



3　**[正解]** オ：③，カ：②

[解説]

$$4x^2+9y^2=36$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{[C]}$$

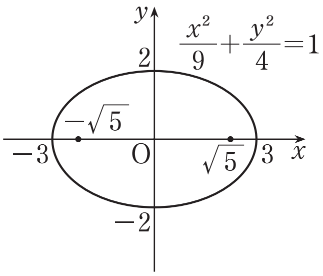
$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ より，焦点は，[D]

$$(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0)$$

方程式は，$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ であるから，

長軸の長さは，$2\cdot3=\mathbf{6}$

短軸の長さは，$2\cdot2=\mathbf{4}$



[C]　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の形に変形する。

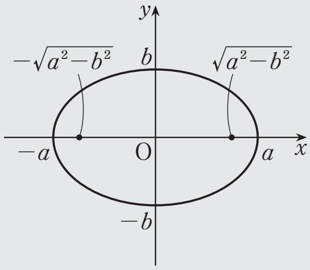
[D]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

において，

焦点：$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

長軸の長さ：$2a$

短軸の長さ：$2b$



4

[正解] キ：9，ク：8

[解説]

焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

とおける。

焦点からの距離の和が 6 であるから，[E]

$2a=6$

$a=3$

焦点の座標の 1 つが $(1,\ 0)$ であるから，

$\sqrt{a^2-b^2}=1$ [F]

$9-b^2=1$

$b^2=8$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1}$$

[E]　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は，$2a$

[F]　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ の焦点は，
$(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$

5

[正解] ケ：3，コ：7

[解説]

焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (b>a>0)$$

とおける。

焦点からの距離の和が $2\sqrt{7}$ であるから，[G]

$2b=2\sqrt{7}$

$b=\sqrt{7}$

焦点の座標の 1 つが $(0,\ 2)$ であるから，

$\sqrt{b^2-a^2}=2$ [H]

$7-a^2=4$

$a^2=3$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{7}=1}$$

[G]　楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は，$2b$

[H]　楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$ の焦点は，
$(0,\ \sqrt{b^2-a^2})$，$(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：①

[解説]

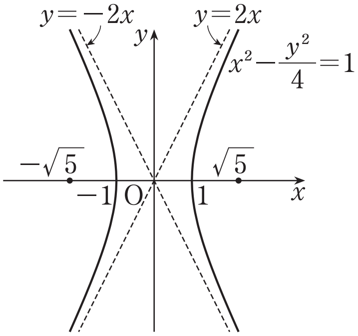
$x^2-\frac{y^2}{4}=1$ より，$\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$

$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$ より，焦点は，[A]

$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

漸近線は，$y=\frac{2}{1}x$，$y=-\frac{2}{1}x$

すなわち，$\boldsymbol{y=2x}$，$\boldsymbol{y=-2x}$ [A]



[A]　双曲線

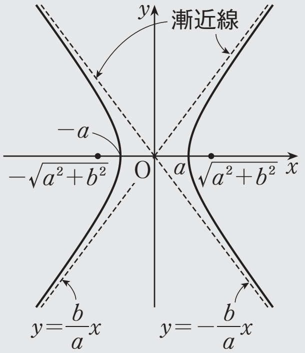
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

の焦点は，

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

漸近線は，

$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$



2

[正解] ウ：②，エ：②

[解説]

$$5x^2-4y^2=-20$$

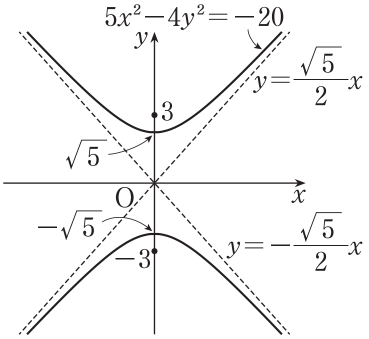
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=-1$$

$$\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{5})^2}=-1$$

$\sqrt{4+5}=3$ より，焦点は，［B］

$$(0,\ 3),\ (0,\ -3)$$

漸近線は，$\boldsymbol{y=\frac{\sqrt{5}}{2}x}$，$\boldsymbol{y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x}$ ［B］



［B］　双曲線

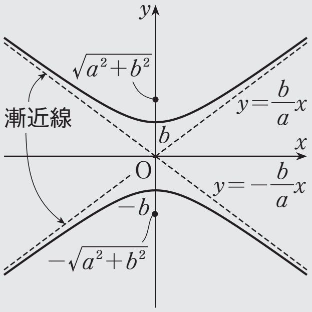
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ $(a>0,\ b>0)$

の焦点は，

$(0,\ \sqrt{a^2+b^2})$，$(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$

漸近線は，

$y=\frac{b}{a}x$，$y=-\frac{b}{a}x$



3　**[正解]** オ：③

[解説]

焦点が x 軸上にあるので，求める方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。

焦点からの距離の差が 6 であるから，[C]

$$2a=6$$

$$a=3$$

焦点の座標の 1 つが (4，0) であるから，

$$\sqrt{a^2+b^2}=4$$ [D]

$$9+b^2=16$$

$$b^2=7$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1}$$

[C]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

の焦点からの距離の差は $2a$ に等しい。

[D]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$$

の焦点は，

$(\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$，$(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$

4　**[正解]** カ：③

[解説]

焦点が y 軸上にあるので，求める方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0)$$

とおける。

焦点の座標の 1 つが $(0,\ 3)$ であるから，

$$\sqrt{a^2+b^2}=3 \quad \text{[E]}$$

$$a^2+b^2=9 \quad \cdots\cdots①$$

漸近線の 1 つが $y=\sqrt{2}\,x$ であるから，

$$\frac{b}{a}=\sqrt{2} \quad \text{[F]}$$

$$b=\sqrt{2}\,a \quad \cdots\cdots②$$

①，②より，$a^2+2a^2=9$

$$a^2=3$$

①より，$3+b^2=9$

$$b^2=6$$

よって，求める方程式は，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=-1}$$

[E]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$$

の焦点は，

$$(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ (0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

[F]　双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$$

の漸近線は，

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：②

[解説]

$$y^2=4x$$

$$y^2=4\cdot1\cdot x$$

この放物線の焦点の座標は，(1，0)

よって，移動後の放物線の方程式は，

$$(y-1)^2=4(x-2)$$ [A]

焦点の座標は，

(3，1) [B]

[A]　曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は，
　$f(x-p,\ y-q)=0$

[B]　焦点も x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものになる。

2　**[正解]** ウ：②，エ：①

[解説]

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$$

$\sqrt{6-2}=2$ より，この楕円の焦点の座標は，

(0，2)，(0，−2) [C]

よって，移動後の楕円の方程式は，

$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$$

焦点の座標は，

(1，0)，(1，−4)

[C]　焦点は y 軸上にある。

3　**[正解]** オ：②，カ：②

[解説]

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$$

$\sqrt{5+4}=3$ より，この双曲線の焦点の座標は，

$$(3,\ 0),\ (-3,\ 0)$$

よって，移動後の双曲線の方程式は，

$$\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

焦点の座標は，

$$(5,\ 3),\ (-1,\ 3)$$

4　**[正解]** キ：②，ク：⑦

[解説]

$$y^2-2x-2y+7=0$$

$$(y-1)^2-1-2x+7=0$$ [D]

$$(y-1)^2=2x-6$$

$$(y-1)^2=2(x-3)$$

よって，この曲線は，放物線 $\boldsymbol{y^2=2x}$ を

x 軸方向に 3，**y 軸方向に 1** だけ

平行移動したものである。[E]

[D]　式を $(y-q)^2=4a(x-p)$ の形に変形する。

[E]　曲線 $(y-q)^2=4a(x-p)$ は，放物線 $y^2=4ax$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

5　**[正解] ケ：③，コ：⑦**

[解説]

$$2x^2-3y^2-8x-6y-1=0$$

$$2(x^2-4x)-3(y^2+2y)-1=0$$

$$2\{(x-2)^2-4\}-3\{(y+1)^2-1\}-1=0$$

$$2(x-2)^2-3(y+1)^2=6$$

$$\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

よって，この曲線は，双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1}$ を

x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ

平行移動したものである。[F]

［F］ 曲線 $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2

[解説]

$$\begin{cases} y^2=4x & \cdots\cdots① \\ x-y+1=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [A]

②より，$x=y-1$　……③

これを①に代入すると，

$y^2=4(y-1)$

$y^2-4y+4=0$

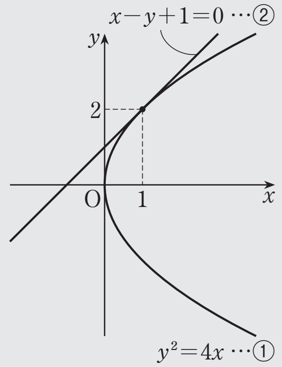
$(y-2)^2=0$

$y=2$

このとき，③より，$x=1$

よって，共有点の座標は，**(1，2)** [B]

［A］ ①，②の連立方程式の実数解が，共有点の x，y 座標である。



［B］ このとき，放物線と直線は点 (1，2) で接する。

2

[正解] ウ：2，エオ：−4

[解説]

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5}=1 & \cdots\cdots① \\ x-2y+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より，$x^2+4y^2=20$　……①′

②より，$2y=x+2$　……②′

②′を①′に代入すると，[C]

$x^2+(x+2)^2=20$

$2x^2+4x-16=0$

$x^2+2x-8=0$

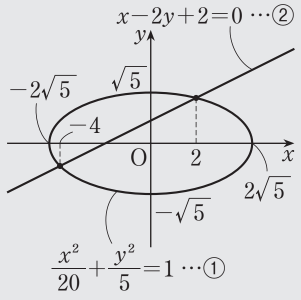
$(x-2)(x+4)=0$

$x=2,\ -4$

よって，共有点の x 座標は，

2，−4

［C］ ①′は $x^2+(2y)^2=20$ と変形できるので，$2y$ の部分に $x+2$ を代入するとよい。



3 **[正解]** カ：1，キ：0，ク：1，ケ：2

[解説]

$$\begin{cases} 3x^2-y^2=3 & \cdots\cdots① \\ y=2x+k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②を①に代入して，

$$3x^2-(2x+k)^2=3$$

$$-x^2-4kx-k^2-3=0$$

$$x^2+4kx+(k^2+3)=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-1\cdot(k^2+3)$$ [D]

$$=3k^2-3$$

$$=3(k^2-1)$$

$D>0$ のとき，共有点は 2 個であり，このとき，

$k^2-1>0$ より，$k<-1$，$1<k$ [E]

$D=0$ のとき，共有点は 1 個であり，

このとき，$k^2-1=0$ より，$k=\pm1$

$D<0$ のとき，共有点はない。

このとき，$k^2-1<0$ より，$-1<k<1$

以上より，

$-1<k<1$ のとき，　0 個

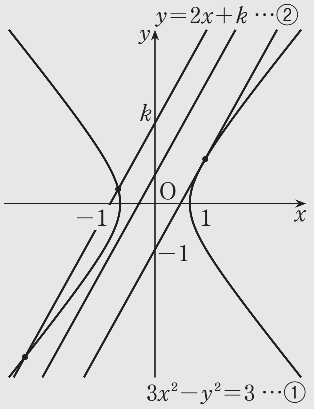
$k=\pm1$ のとき，　1 個

$k<-1$，$1<k$ のとき，2 個

[D]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

[E]　$D>0 \Longleftrightarrow$ 共有点 2 個
$D=0 \Longleftrightarrow$ 共有点 1 個
$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点なし



第 2 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2

[解説]

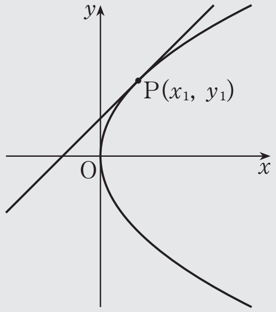
放物線 $y^2=16x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は，

$$4y=8(x+1)$$ [A]

よって，$\boldsymbol{y=2x+2}$

[A]　放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$y_1y=2p(x+x_1)$$



2

[正解] ウ：2，エ：4

[解説]

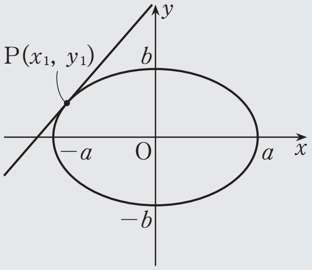
楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式は，

$$\frac{1\cdot x}{2}+\frac{-2\cdot y}{8}=1$$ [B]

よって，$\boldsymbol{y=2x-4}$

[B]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$



3

[正解] オ：2，カ：1

[解説]

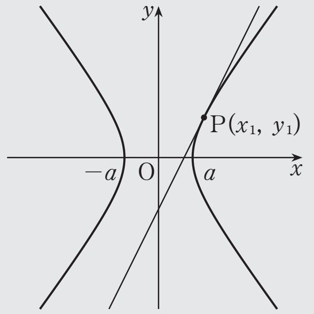
双曲線 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における

接線の方程式は，$\frac{(-2)\cdot x}{1}-\frac{3\cdot y}{3}=1$ [C]

よって，$\boldsymbol{y=-2x-1}$

[C]　双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$



4

[正解] キ：4，ク：3

[解説]

$2x^2-y^2=-4$ より，

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$$

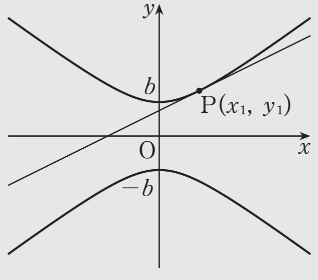
この双曲線上の点 $(4,\ 6)$ における接線の方程式は，

$$\frac{4\cdot x}{2}-\frac{6\cdot y}{4}=-1$$ [D]

よって，$\boldsymbol{4x-3y+2=0}$

[D]　双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$



5

[正解] ケ：2，コ：4

[解説]

$4x^2+y^2=8$ より，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$$

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{2}+\frac{y_1y}{8}=1$$

$$4x_1x+y_1y=8 \quad \cdots\cdots①$$ [E]

[E] 接点の座標を文字でおいて，接線の方程式をつくる。

これが点 $(0,\ 4)$ を通るので，

$$4y_1=8$$

$$y_1=2 \quad \cdots\cdots②$$

また，接点は楕円上にあるので，

$$4{x_1}^2+{y_1}^2=8 \quad \cdots\cdots③$$ [F]

[F] 楕円の方程式に $x=x_1$，$y=y_1$ を代入する。

②を③に代入すると，

$$4{x_1}^2+4=8$$

$${x_1}^2=1$$

$$x_1=\pm1$$

$x_1=1$，$y_1=2$ のとき，①より，

$$4x+2y=8$$

$$y=-2x+4$$

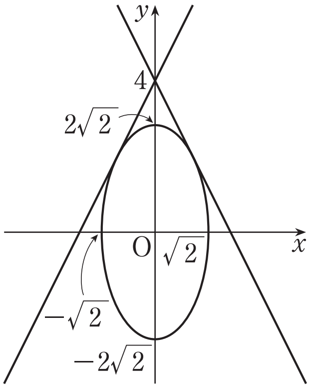
$x_1=-1$，$y_1=2$ のとき，①より，

$$-4x+2y=8$$

$$y=2x+4$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x+4,\ y=-2x+4}$$



（別解）

点 (0, 4) を通る接線は x 軸に垂直でないので，

その方程式は，

$$y=mx+4 \quad \cdots\cdots ①$$

とおくことができる。これを楕円の方程式

$4x^2+y^2=8$ に代入すると，

$$4x^2+(mx+4)^2=8$$

$$(m^2+4)x^2+8mx+8=0$$

この方程式の判別式を D とすると，$D=0$ である。［G］

$$\frac{D}{4}=(4m)^2-(m^2+4)\cdot 8$$

$$=8m^2-32$$

より，$8m^2-32=0$

$$m^2=4$$

$$m=\pm 2$$

①より，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x+4,\ y=-2x+4}$$

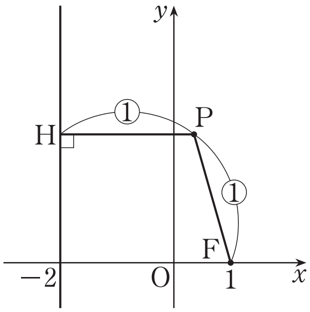
［G］　楕円と直線が接する
$\Longleftrightarrow D=0$

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：6，イ：3

[解説]

点Pの座標を$(x,\ y)$，点Pから直線$x=-2$に引いた垂線をPHとする。



$$\mathrm{PF}^2=(x-1)^2+y^2$$

$$\mathrm{PH}^2=(x+2)^2$$

PF：PH＝1：1より，

PF＝PHだから，

$$\mathrm{PF}^2=\mathrm{PH}^2 \quad \text{[A]}$$

$$(x-1)^2+y^2=(x+2)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2=x^2+4x+4$$

$$y^2=6x+3$$

よって，点Pの軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y^2=6x+3}$

[A]　両辺を2乗する。

2

[正解] ウ：2，エ：4，オ：3

[解説]

PF：PH＝1：2 より，PH＝2PF だから，［B］

$$PH^2=4PF^2$$

$$(x+2)^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$$

$$x^2+4x+4=4x^2-8x+4+4y^2$$

$$3x^2-12x+4y^2=0$$

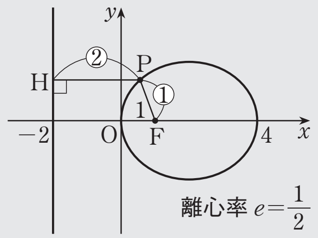
$$3(x-2)^2+4y^2=12$$

$$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

よって，点 P の軌跡は，

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1}$ ［C］

［B］



離心率 $e=\dfrac{1}{2}$

［C］　これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ を x 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

曲線 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

3

[正解] カ：3，キ：4，クケ：12

[解説]

PF：PH＝2：1 より，2PH＝PF だから，［D］

$$4PH^2=PF^2$$

$$4(x+2)^2=(x-1)^2+y^2$$

$$4x^2+16x+16=x^2-2x+1+y^2$$

$$3x^2+18x-y^2+15=0$$

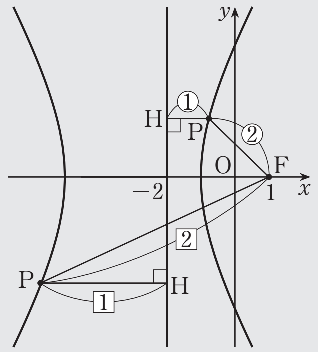
$$3(x+3)^2-y^2=12$$

$$\frac{(x+3)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

よって，点 P の軌跡は，

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{(x+3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1}$ ［E］

［D］



離心率 $e=2$

［E］　これは，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ を x 軸方向に -3 だけ平行移動したものである。

曲線 $\dfrac{(x-p)^2}{a^2}-\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$x=t+2$ より，$t=x-2$

これを $y=t^2-4$ に代入すると，[A]

$$y=(x-2)^2-4$$

$$y=x^2-4x$$

よって，求める曲線は，

放物線 $y=x^2-4x$

[A]　与えられた 2 つの式から t を消去することを考える。

2

[正解] イ：③

[解説]

$x=\sqrt{t}$ より，$t=x^2$

これを $y=t-3$ に代入すると，

$$y=x^2-3$$

また，$x=\sqrt{t} \geqq 0$ [B]

よって，求める曲線は，

放物線 $y=x^2-3$ の $x \geqq 0$ の部分

[B]　x の変域に制限があることに注意する。

3 [正解] ウ：③

[解説]

$x=3\cos\theta$，$y=2\sin\theta-1$ より，

$$\cos\theta=\frac{x}{3},\quad \sin\theta=\frac{y+1}{2}$$ [C]

[C] $\cos\theta$，$\sin\theta$ を x，y の式で表す。

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると，

$$\left(\frac{y+1}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

よって，求める曲線は，

楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1}$

4 [正解] エ：①

[解説]

$x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=2\tan\theta$ より，

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{x}{3},\quad \tan\theta=\frac{y}{2}$$ [D]

[D] $\dfrac{1}{\cos\theta}$，$\tan\theta$ を x，y の式で表す。

これを $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると，

$$1+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

よって，求める曲線は，

双曲線 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1}$

5

[正解] オ：②

[解説]

$x^2+y^2=9$ より，$x^2+y^2=3^2$

この円の媒介変数表示の 1 つは，[E]

$$\boldsymbol{x=3\cos\theta,\ \ y=3\sin\theta}$$

> [E] 円 $x^2+y^2=a^2$ の媒介変数表示は，$x=a\cos\theta$，$y=a\sin\theta$

6

[正解] カ：③

[解説]

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ より，$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

この楕円の媒介変数表示の 1 つは，[F]

$$\boldsymbol{x=2\cos\theta,\ \ y=3\sin\theta}$$

> [F] 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示は，$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$

7

[正解] キ：④

[解説]

$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{16}=1$ より，

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$$

この楕円の媒介変数表示の 1 つは，

$$x-1=3\cos\theta,\ \ y+2=4\sin\theta$$ [G]

$$\boldsymbol{x=3\cos\theta+1,\ \ y=4\sin\theta-2}$$

> [G] $x-1=X$，$y+2=Y$ とおき，$X=3\cos\theta$，$Y=4\sin\theta$ として，媒介変数表示を考える。

第 4 講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

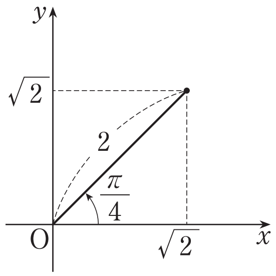
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

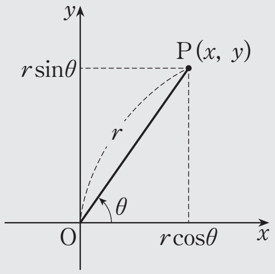
$$x=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$ [A]

$$y=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

よって，直交座標は，$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$



[A] 点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，
$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$



2

[正解] イ：④

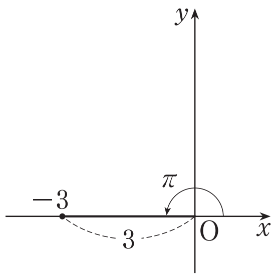
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

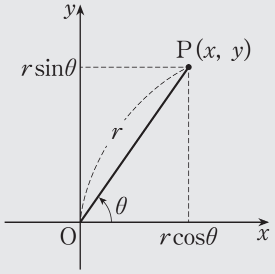
$$x=3\cos\pi=3\cdot(-1)=-3$$ [B]

$$y=3\sin\pi=3\cdot0=0$$

よって，直交座標は，$(-3,\ 0)$



[B] 点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，
$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$



3 [正解] ウ：④

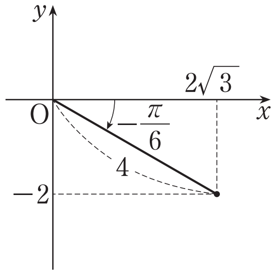
[解説]

直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$x=4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$ [C]

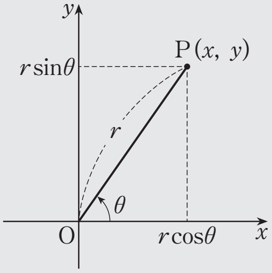
$$y=4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

よって，直交座標は，$\boldsymbol{(2\sqrt{3},\ -2)}$



[C]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$



4 [正解] エ：③

[解説]

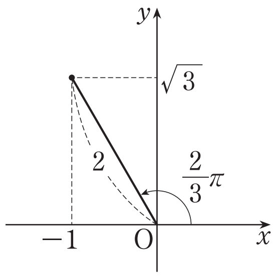
$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$ [D]

よって，$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{2}{3}\pi$$

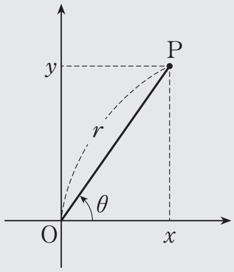
よって，極座標は，$\boldsymbol{\left(2,\ \dfrac{2}{3}\pi\right)}$



[D]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$



5

[正解] オ：②

[解説]

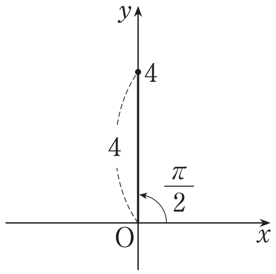
$$r=\sqrt{0^2+4^2}=4$$ [E]

よって，$\cos\theta=\dfrac{0}{4}=0$，$\sin\theta=\dfrac{4}{4}=1$

これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

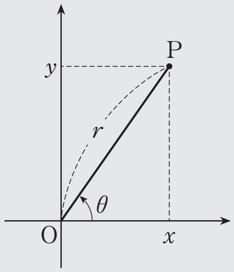
よって，極座標は，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$



[E]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$



6

[正解] カ：③

[解説]

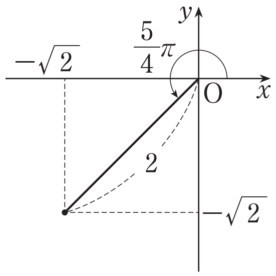
$$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}=2$$ [F]

よって，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

これを満たす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は，

$$\theta=\frac{5}{4}\pi$$

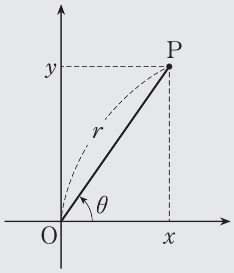
よって，極座標は，$\left(2,\ \dfrac{5}{4}\pi\right)$



[F]　点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$



第 4 講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

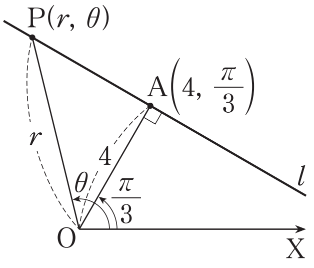
[解説]

直線 l 上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，

$$\mathrm{OP}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{OA}$$ [A]

よって，求める極方程式は，

$$r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=4$$



[A] 点 $\mathrm{A}(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線の極方程式は，
$r\cos(\theta-\alpha)=a\ \ (a>0)$

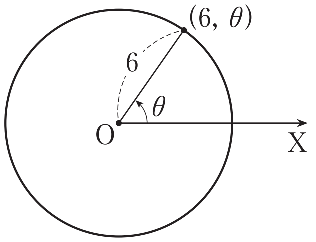
2

[正解] イ：②

[解説]

極方程式 $r=6$ の表す曲線は，

中心が極 O，半径が 6 の円 [B]



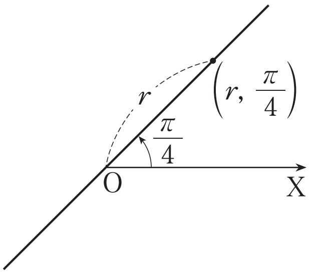
[B] $r=6$ は，極からの距離が一定値 6 であることを表す。

3 [正解] ウ：④

[解説]

極方程式 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ の表す曲線は,

極 O を通り, 始線 OX と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線 [C]



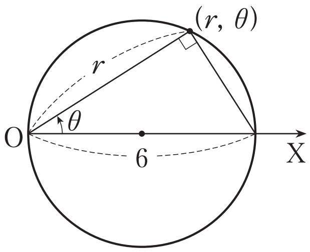
[C]　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ は, 曲線上の点 P に対し, OP と始線とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であることを表す。

4 [正解] エ：②

[解説]

極方程式 $r=6\cos\theta$ の表す曲線は,

中心が (3, 0), 半径が 3 の円 [D]



[D]　中心が $(a,\ 0)$, 半径が a の円を表す極方程式は,
　$r=2a\cos\theta$

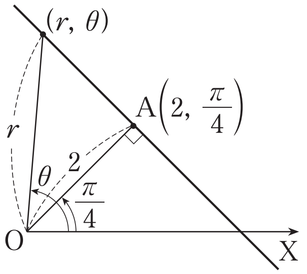
5　[正解] オ：④

[解説]

極方程式 $r\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$ の表す曲線は，

極座標が $\left(2,\ \frac{\pi}{4}\right)$ である点 A を通り，

線分 OA に垂直な直線 [E]



[E]　点 $A(a,\ \alpha)$ を通り，OA に垂直な直線の極方程式は，
$r\cos(\theta-\alpha)=a\ \ (a>0)$

6　[正解] カ：④

[解説]

$r=\sin\theta+\cos\theta$ より，

$$r^2=r\sin\theta+r\cos\theta$$ [F]

[F]　両辺に r をかける。

曲線上の点 $P(r,\ \theta)$ の直交座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$r^2=x^2+y^2,\ \ r\sin\theta=y,\ \ r\cos\theta=x$$

より，$x^2+y^2=y+x$ [G]

$$\boldsymbol{x^2+y^2-x-y=0}$$

[G]　方程式に $r^2=x^2+y^2$，$r\sin\theta=y$，$r\cos\theta=x$ を代入する。

7

[正解] キ：③

[解説]

曲線上の点 P$(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると,

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$$

これを $2x^2 + y^2 = 1$ に代入すると,

$$2(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 1$$

$$r^2\left(2\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 1$$

$$r^2\left(2\cos^2\theta + 1 - \cos^2\theta\right) = 1$$ [H]

$$\boldsymbol{r^2\left(1 + \cos^2\theta\right) = 1}$$

[H]　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して, $\sin\theta$ を $\cos\theta$ で表す。

第 5 講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-4

[解説]

3 点 0，α，β が一直線上にあるとき，$\beta = k\alpha$ となる実数 k が存在する。[A]

$$x - 6i = k(2 + 3i)$$

より，

$$x - 6i = 2k + 3ki$$

よって，

$$\begin{cases} x = 2k & \cdots\cdots ① \\ -6 = 3k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ [B]

②より，$k = -2$

①より，$\boldsymbol{x = -4}$

[A] 3 点 0，α，β が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\beta = k\alpha$ を満たす実数 k が存在する

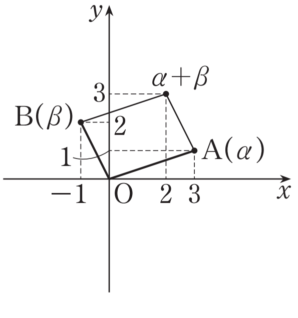
[B] 両辺の実部，虚部がそれぞれ等しい。

2

[正解] ウ：③

[解説]

$$\alpha + \beta = (3 + i) + (-1 + 2i)$$
$$= 2 + 3i$$



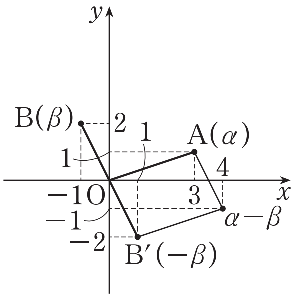
[C]

[C] 3 点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，$\alpha + \beta$ を表す点は，2 辺 OA，OB でつくられる平行四辺形の第 4 の頂点である。

3 [正解] エ：②

[解説]

$$\alpha-\beta=(3+i)-(-1+2i)$$
$$=4-i$$



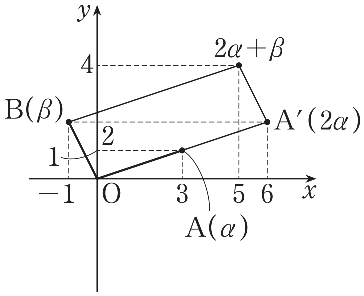
[D]

[D]　3点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，
点 B′($-\beta$) とすると，$\alpha-\beta$ を表す点は，2辺 OA，OB′ でつくられる平行四辺形の第4の頂点である。

4 [正解] オ：①

[解説]

$$2\alpha+\beta=2(3+i)+(-1+2i)$$
$$=5+4i$$



[E]

[E]　3点 O(0)，A(α)，B(β) が一直線上にないとき，
点 A′(2α) とすると，$2\alpha+\beta$ を表す点は，2辺 OA′，OB でつくられる平行四辺形の第4の頂点である。

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：②

[解説]

$z+2\overline{z}=3-4i$ ……①

この両辺の共役複素数を考えると，

$\overline{z+2\overline{z}}=\overline{3-4i}$

$\overline{z}+2\overline{\overline{z}}=3+4i$ [A]

$\overline{z}+2z=\mathbf{3+4i}$ ……②

①−②×2 より，[B]

$-3z=-3-12i$

$z=\mathbf{1+4i}$

> [A]　共役な複素数の性質
> [1]　$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$
> [2]　$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$
> [3]　$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$
> [4]　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$

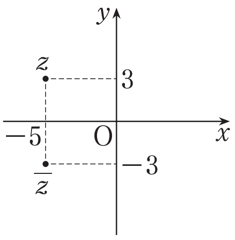
> [B]　z と $\overline{z}$ についての連立方程式を解くことを考える。

2　**[正解]** ウ：③

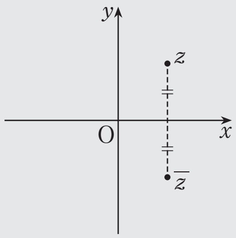
[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，点 z と実軸に関して対称な点を表す複素数は，[C]

$\overline{z}=\mathbf{-5-3i}$



> [C]　点 z と実軸に関して対称な点は，点 $\overline{z}$

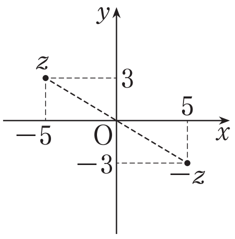


3　**[正解]** エ：②

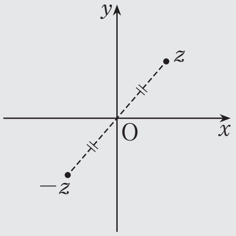
[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，点 z と原点に関して対称な点を表す複素数は，[D]

$-z=\mathbf{5-3i}$



> [D]　点 z と原点に関して対称な点は，点 $-z$

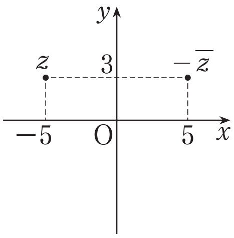


4 **[正解]** オ：①

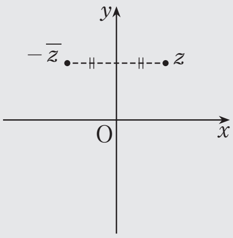
[解説]

$z=-5+3i$ とおくと，点 z と虚軸に関して対称な点を表す複素数は，[E]

$$-\overline{z}=5+3i$$



[E]　点 z と虚軸に関して対称な点は，点 $-\overline{z}$



第 5 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

$$|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2} \quad \text{[A]}$$
$$=\sqrt{25}$$
$$=5$$

[A]　$z=a+bi$ のとき，
$|z|=|a+bi|$
$=\sqrt{a^2+b^2}$

2

[正解] イウ：29

[解説]

$$|-5+2i|=\sqrt{(-5)^2+2^2} \quad \text{[B]}$$
$$=\sqrt{29}$$

[B]　$z=a+bi$ のとき，
$|z|=|a+bi|$
$=\sqrt{a^2+b^2}$

3

[正解] エ：6

[解説]

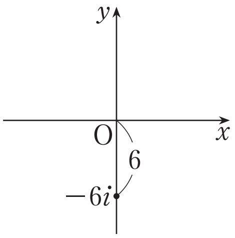
$$|-6i|=\sqrt{0^2+(-6)^2} \quad \text{[C]}$$
$$=6$$

[C]　$z=a+bi$ のとき，
$|z|=|a+bi|$
$=\sqrt{a^2+b^2}$

（別解）

原点 O と点 $-6i$ の距離は 6 だから，

$$|-6i|=6$$



4

[正解] オ：5

[解説]

$$AB=|(-1+4i)-(3+i)| \quad \text{[D]}$$
$$=|-4+3i|$$
$$=\sqrt{(-4)^2+3^2}$$
$$=\sqrt{25}$$
$$=5$$

[D]　2 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ 間の距離は，
$AB=|\beta-\alpha|$

5

[正解] カキ：34

[解説]

$$\mathrm{AB}=|-3i-(-5)|$$ [E]

$$=|5-3i|$$

$$=\sqrt{5^2+(-3)^2}$$

$$=\sqrt{34}$$

[E]　2点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ 間の距離は，
$\mathrm{AB}=|\beta-\alpha|$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$-2+2i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

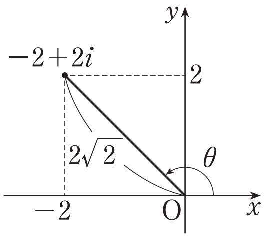
$$r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

$$\theta=\frac{3}{4}\pi$$



よって，$-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

[A]

[A]　複素数の極形式

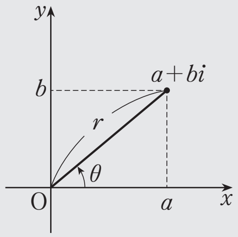
$z\neq0$ のとき，

$z=a+bi$

$\quad=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$



2

[正解] イ：④

[解説]

$1-\sqrt{3}\,i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

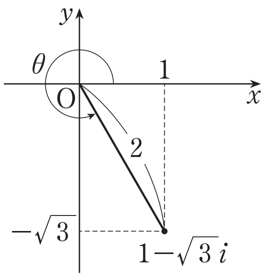
$$r=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

$$\theta=\frac{5}{3}\pi$$



よって，$1-\sqrt{3}\,i=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$ [B]

[B]　複素数の極形式

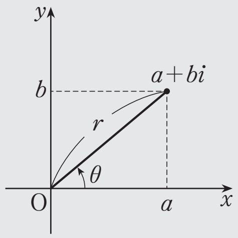
$z\neq0$ のとき，

$z=a+bi$

$\quad=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\theta=\frac{a}{r}$，$\sin\theta=\frac{b}{r}$



3　[正解] ウ：②

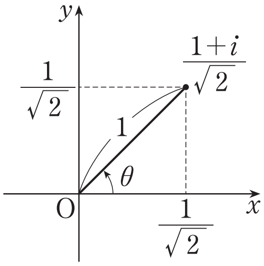
[解説]

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

$$r=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

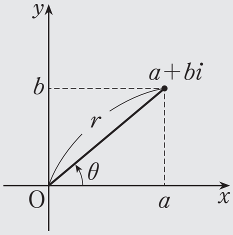
$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ [C]

[C]　複素数の極形式

$z\fallingdotseq 0$ のとき，

$$z=a+bi$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$\cos\theta=\frac{a}{r},\quad \sin\theta=\frac{b}{r}$$



4　[正解] エ：④

[解説]

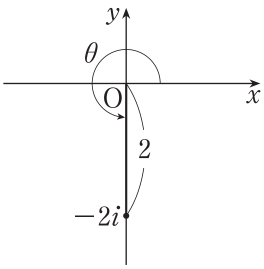
$-2i$ の絶対値を r，偏角を θ とする。

図より，

$$r=2$$

$$\cos\theta=\frac{0}{2}=0,$$

$$\sin\theta=\frac{-2}{2}=-1$$



$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，

$$\theta=\frac{3}{2}\pi$$ [D]

[D]　$-2i$ は虚軸上の点だから，図から絶対値と偏角がわかる。

よって，

$$-2i=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

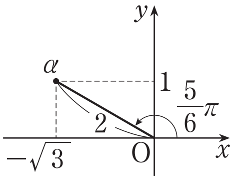
第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

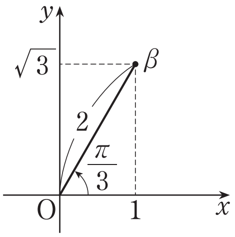
[解説]

$$\alpha=-\sqrt{3}+i$$
$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\quad\text{[A]}$$



[A]　α, β をそれぞれ極形式で表す。

$$\beta=1+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



よって，

$$\alpha\beta=2\cdot2\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right\}\quad\text{[B]}$$
$$=4\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$$

[B]　複素数の積の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
z_1z_2
$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

2

[正解] イ：①

[解説]

$$\alpha=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$\beta=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{2}\left\{\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\quad\text{[C]}$$
$$=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

[C]　複素数の商の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
$\dfrac{z_1}{z_2}$
$=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

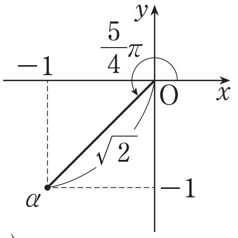
3 [正解] ウ：④

[解説]

$$\alpha = -1-i$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$ [D]

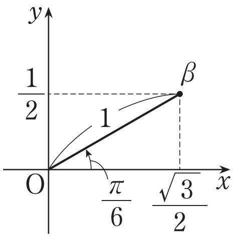


[D]　α, β をそれぞれ極形式で表す。

$$\beta = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$



よって,

$$\alpha\beta = \sqrt{2}\cdot 1\left\{\cos\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$ [E]

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi\right)$$

[E]　複素数の積の極形式
$z_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると,
z_1z_2
$= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$

4 [正解] エ：③

[解説]

$$\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\beta = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

よって,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{1}\left\{\cos\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$ [F]

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$

[F]　複素数の商の極形式
$z_1 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると,
$\dfrac{z_1}{z_2}$
$= \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

第 6 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

点 z を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点を表す

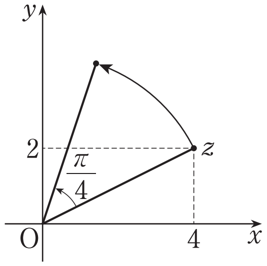
複素数は，

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)z \quad \text{[A]}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(4+2i)$$

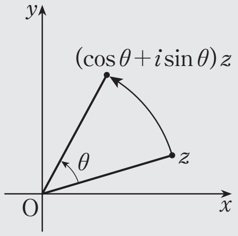
$$=(2\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{2}+2\sqrt{2})i$$

$$=\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,i$$



[A]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は，

$(\cos\theta+i\sin\theta)z$



2　[正解] イ：③

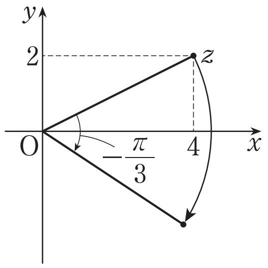
[解説]

点 z を原点を中心に $-\frac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数は，

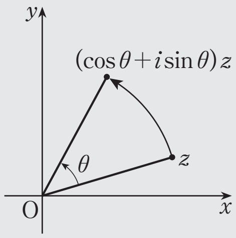
$$\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}z \quad \text{[B]}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)$$

$$=\boldsymbol{(2+\sqrt{3})+(1-2\sqrt{3})i}$$



[B]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は，
$(\cos\theta+i\sin\theta)z$



3　[正解] ウ：①

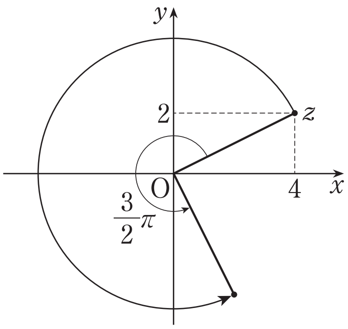
[解説]

点 z を原点を中心に $\frac{3}{2}\pi$ だけ回転した点を表す複素数は，

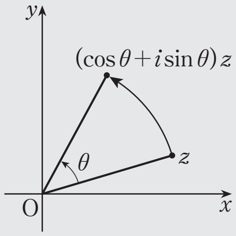
$$\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)z \quad \text{[C]}$$

$$=-i(4+2i)$$

$$=\boldsymbol{2-4i}$$



[C]　点 z を原点を中心に θ だけ回転した点を表す複素数は，
$(\cos\theta+i\sin\theta)z$

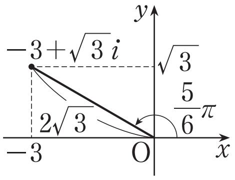


4

[正解] エ：③，オ：③

[解説]

$$-3+\sqrt{3}\,i$$
$$=2\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$ [D]

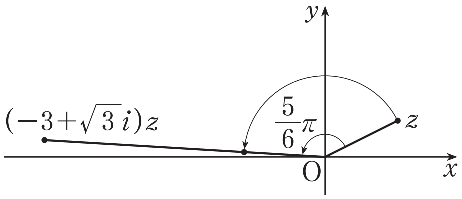


[D]　$-3+\sqrt{3}\,i$ を極形式に直す。

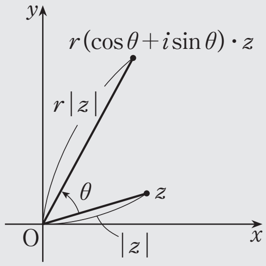
より，

$$(-3+\sqrt{3}\,i)z$$
$$=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)z$$

よって，点 $(-3+\sqrt{3}\,i)z$ は，点 z を原点を中心に $\frac{5}{6}\pi$ だけ回転し，原点からの距離を $2\sqrt{3}$ 倍した点である。[E]



[E]　点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdot z$ は，点 z を原点を中心に θ だけ回転し，原点からの距離を r 倍した点である。



第 7 講　PART1 確認問題 解答

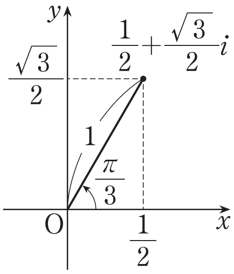
1

[正解] ア：②

[解説]

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

より，[A]



$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^6$$
$$=\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{3}\right)$$ [B]
$$=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$
$$=\mathbf{1}$$

[A]　(　)の中の式を極形式で表す。

[B]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
$=\cos n\theta+i\sin n\theta$

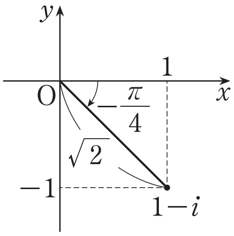
2

[正解] イ：③

[解説]

$$1-i$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

より，[C]



$$(1-i)^5$$
$$=(\sqrt{2})^5\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}^5$$
$$=4\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)\right\}$$ [D]
$$=4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=\mathbf{-4+4i}$$

[C]　(　)の中の式を極形式で表す。

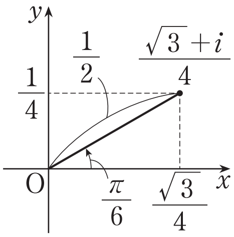
[D]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$
$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

3 [正解] ウ：③

[解説]

$$\frac{\sqrt{3}+i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-4}$$

$$=2^4\left\{\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$$

[E]

$$=16\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\boldsymbol{-8-8\sqrt{3}\,i}$$

[E]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$
$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

4 **[正解]** エ：④

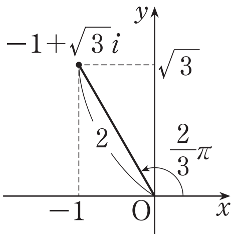
[解説]

$-1+\sqrt{3}\,i$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$1+i$

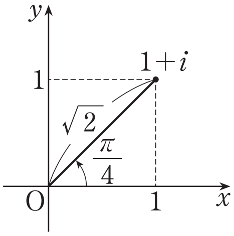
$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$



より，[F]

$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}$

$=\frac{2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$



$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$ [G]

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$

よって，

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{12}$

$=(\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right)^{12}$ [H]

$=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)$

$=64\cdot(-1)$

$=\mathbf{-64}$

[F]　(　)の中の分母・分子をそれぞれ極形式で表す。

[G]　複素数の商の極形式
$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，
$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ とすると，
$\frac{z_1}{z_2}$
$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$

[H]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n$
$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：③，ウ：1，エ：③，オ：③

[解説]

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$　……①

とおくと，

$$\boldsymbol{z^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)}$$ [A]

また，$-1=\boldsymbol{\cos\pi+i\sin\pi}$

よって，$z^4=-1$ は次のように表される。

$$r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=\cos\pi+i\sin\pi$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$$r^4=1,\ 4\theta=\pi+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$ [B]

$r>0$ より，$\boldsymbol{r=1}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ であるから，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi}$$

①より，求める解は，

$$\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

すなわち，$\boldsymbol{z=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$　(複号任意)

[A]　ド・モアブルの定理
n が整数のとき，
$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
$=\cos n\theta+i\sin n\theta$

[B]　4θ がとり得る値は 1 つではないので，文字 k を使った式で表す。

2

[正解] カ：4，キ：②，ク：2，ケ：②，コ：③

[解説]

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ ……①

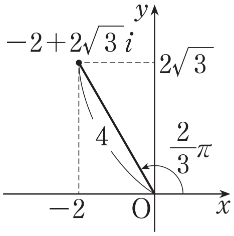
とおくと，

$$z^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$ [C]

また，

$$-2+2\sqrt{3}\,i$$

$$=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$



よって，$z^2=-2+2\sqrt{3}\,i$

は次のように表される。

$$r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$$r^2=4,\ 2\theta=\frac{2}{3}\pi+2\pi\times k\ (k\text{ は整数})$$ [D]

$r>0$ より，$\boldsymbol{r=2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}+\pi\times k$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$k=0$，1 であるから，

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi}$$

①より，求める解は，

$$2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=1+\sqrt{3}\,i$$

$$2\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)=-1-\sqrt{3}\,i$$

すなわち，$\boldsymbol{z=\pm(1+\sqrt{3}\,i)}$

> [C] ド・モアブルの定理
> n が整数のとき，
> $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$
> $=\cos n\theta+i\sin n\theta$

> [D] 2θ がとり得る値は 1 つではないので，文字 k を使った式で表す。

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：3

[解説]

線分 AB を 2：1 に内分する点を表す複素数は，

$$\frac{1\cdot(1+5i)+2\cdot(7+2i)}{2+1}=\frac{15+9i}{3} \quad \text{[A]}$$

$$=\mathbf{5+3}\boldsymbol{i}$$

[A]　2 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ について，線分 AB を $m:n$ に内分する点は，$\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}$

2

[正解] ウ：4，エ：8

[解説]

線分 AC を 1：3 に外分する点を表す複素数は，

$$\frac{-3\cdot(1+5i)+1\cdot(-5-i)}{1-3}=\frac{-8-16i}{-2} \quad \text{[B]}$$

$$=\mathbf{4+8}\boldsymbol{i}$$

[B]　2 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ について，線分 AB を $m:n$ に外分する点は，$\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}$

3

[正解] オ：1，カ：1，キ：2

[解説]

線分 BC の中点を表す複素数は，

$$\frac{(7+2i)+(-5-i)}{2}=\frac{2+i}{2} \quad \text{[C]}$$

$$=\mathbf{1+\frac{1}{2}}\boldsymbol{i}$$

[C]　2 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$ について，線分 AB の中点は，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

4

[正解] ク：1，ケ：2

[解説]

△ABC の重心を表す複素数は，

$$\frac{(1+5i)+(7+2i)+(-5-i)}{3} \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{3+6i}{3}$$

$$=\mathbf{1+2}\boldsymbol{i}$$

[D]　3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ について，△ABC の重心は，$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：④

[解説]

点 β を，点 α を中心に $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転した点が γ だから，

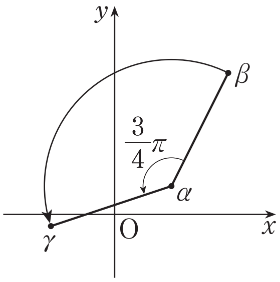
$$\boldsymbol{\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)(\beta-\alpha)}$$ [A]

$$\gamma=\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\{(4+5i)-(2+i)\}+(2+i)$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(2+4i)+(2+i)$$

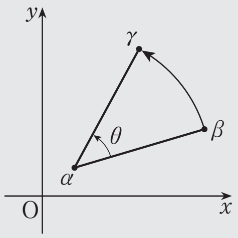
$$=-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i+\sqrt{2}i-2\sqrt{2}+2+i$$

$$=\boldsymbol{(2-3\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})i}$$



[A]　点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると，

$$\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$$

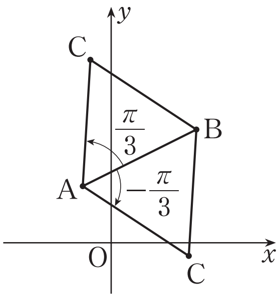


2

[正解] ウ：②，エ：④

[解説]

点 γ は，点 β を，点 α を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ または $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点である。



[B]

> [B]　点 γ は2通りあることに注意する。

すなわち，

$$\gamma-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots①$$

[C]

> [C]　点 β を，点 α を中心に θ だけ回転した点を γ とすると，
> $\gamma-\alpha=(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)$

または，

$$\gamma-\alpha=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\beta-\alpha)\quad\cdots\cdots②$$

ここで，$\beta-\alpha=(3+4i)-(-1+2i)=4+2i$

①のとき，

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+(-1+2i)$$
$$=2+i+2\sqrt{3}\,i-\sqrt{3}-1+2i$$
$$=(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i$$

②のとき，

$$\gamma=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(4+2i)+(-1+2i)$$
$$=2+i-2\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}-1+2i$$
$$=(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i$$

以上により，

$$\boldsymbol{\gamma=(1-\sqrt{3})+(3+2\sqrt{3})i,}$$
$$\boldsymbol{(1+\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})i}$$

第 8 講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：2，エ：④

[解説]

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(-6+5i)-(2+i)}{(5+2i)-(2+i)}$$

$$=\frac{-8+4i}{3+i}$$

$$=\frac{(-8+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{-24+8i+12i-4i^2}{9-i^2}$$

$$=\frac{-20+20i}{10}$$

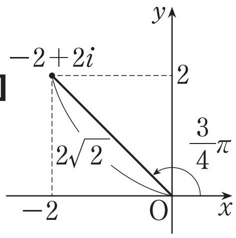
$$=\boldsymbol{-2+2i}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

よって，

$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{3}{4}\pi \quad \text{[B]}$$

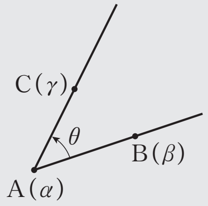
より，$\angle \mathbf{BAC}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$



[A] 分母・分子に $3-i$ をかけ，分母を実数にする。

[B] 半直線のなす角
異なる3点 A(α)，B(β)，C(γ) について，半直線 AB から半直線 AC までの回転角 θ は，

$$\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$



2

[正解] オ：5

[解説]

$\alpha=2i$，$\beta=1+i$，$\gamma=x-3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x-3i)-2i}{(1+i)-2i}$$

$$=\frac{x-5i}{1-i}$$

$$=\frac{(x-5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$ [C]

$$=\frac{x+xi-5i-5i^2}{1-i^2}$$

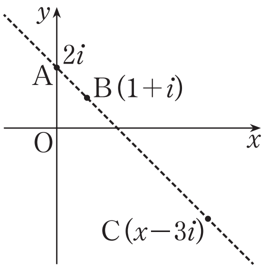
$$=\frac{(x+5)+(x-5)i}{2}$$

[C]　分母・分子に $1+i$ をかけ，分母を実数にする。

3 点 A，B，C が一直線上にあるのは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数のときであるから，[D]

$$x-5=0$$

$$\boldsymbol{x=5}$$



[D]　異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，
3 点 A，B，C が一直線上にある
$\Longleftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数

3 [正解] カ：4

[解説]

$\alpha=1-i$，$\beta=3+2i$，$\gamma=x-3i$ とする。

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{(x-3i)-(1-i)}{(3+2i)-(1-i)}$$

$$=\frac{(x-1)-2i}{2+3i}$$

$$=\frac{\{(x-1)-2i\}(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$ [E]

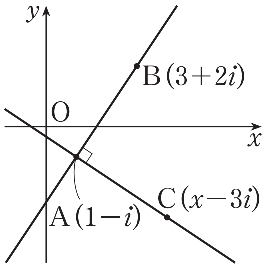
$$=\frac{2(x-1)-3(x-1)i-4i+6i^2}{4-9i^2}$$

$$=\frac{(2x-8)+(-3x-1)i}{13}$$

2 直線 AB，AC が垂直に交わるのは，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数のときであるから，[F]

$$2x-8=0 \quad \text{かつ} \quad -3x-1\neq 0$$

よって，$\boldsymbol{x=4}$



[E]　分母・分子に $2-3i$ をかけ，
分母を実数にする。

[F]　異なる 3 点 A(α)，B(β)，C(γ) について，
2 直線 AB，AC が垂直に交わる
$\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

第 8 講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②

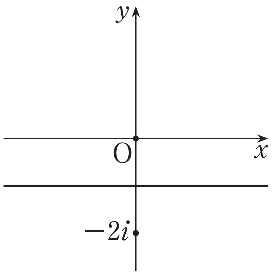
[解説]

$|z|=|z+2i|$ より,

$|z-0|=|z-(-2i)|$

これを満たす点 z は,

2 点 0, $-2i$ を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。[A]



[A] 異なる 2 点 A(α), B(β) について, 方程式 $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点 z
…線分 AB の垂直二等分線を描く。

2 **[正解]** イ：②

[解説]

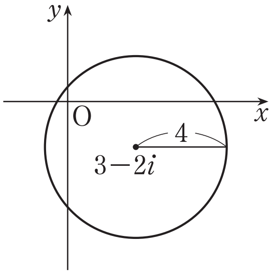
$|z-3+2i|=4$ より,

$|z-(3-2i)|=4$

これを満たす点 z は,

点 $3-2i$ を中心とする半径 4 の円を描く。

[B]



[B] 異なる 2 点 A(α), B(β) について, 方程式 $|z-\alpha|=r$ ($r>0$) を満たす点 z
…点 α を中心とする半径 r の円を描く。

3 [正解] ウ：③

[解説]

$$(z-3i)(\overline{z}+3i)=2 \quad \cdots\cdots(*)$$

$z=x+yi$ (x, y は実数)とおく。

(∗)に代入すると，

$$(x+yi-3i)(x-yi+3i)=2$$

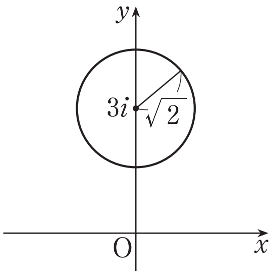
$$\{x+(y-3)i\}\{x-(y-3)i\}=2$$

$$x^2+(y-3)^2=2$$ [C]

[C]　この方程式は，円の方程式である。

よって，(∗)を満たす点 z は，

点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。



(別解)

$(z-3i)(\overline{z}+3i)=2$ より，

$$(z-3i)(\overline{z-3i})=2$$

$$|z-3i|^2=2$$ [D]

[D]　$z\overline{z}=|z|^2$

よって，$|z-3i|=\sqrt{2}$ だから，点 z は，

点 $3i$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

4

[正解]エ：③

[解説]

$|z+2|=2|z-1|$　……(∗)

$z=x+yi$ (x, y は実数)とおく。

(∗)に代入すると,

$|x+2+yi|=2|x-1+yi|$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ [E]

[E]　$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

両辺を 2 乗すると,

$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$

$3x^2-12x+3y^2=0$

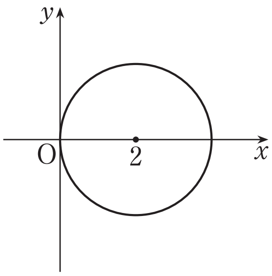
$x^2-4x+y^2=0$

$(x-2)^2+y^2=4$ [F]

[F]　この方程式は，円の方程式である。

よって，(∗)を満たす点 z は,

点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。



(別解)

$|z+2|=2|z-1|$

両辺を 2 乗すると,

$|z+2|^2=4|z-1|^2$

$(z+2)(\overline{z+2})=4(z-1)(\overline{z-1})$ [G]

[G]　$|z|^2=z\overline{z}$

$(z+2)(\overline{z}+2)=4(z-1)(\overline{z}-1)$

$z\overline{z}+2z+2\overline{z}+4=4z\overline{z}-4z-4\overline{z}+4$

$z\overline{z}-2z-2\overline{z}=0$

$(z-2)(\overline{z}-2)=4$

$(z-2)(\overline{z-2})=4$

$|z-2|^2=4$

よって，$|z-2|=2$ より，点 z は,

点 2 を中心とする半径 2 の円を描く。